

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
(MENTION SCIENCES)

PAR

TURCU AUREL

(ROUMANIE)

1ere THESE : Solutions périodiques et presque - périodiques
de l'équation de Duffing

2eme THESE : Propositions données par la faculté

SOUTENUES LE 4 JUIN 1962 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M. L. GAUTHIER President

M. H. CABANNES

M. R. VICHNIEVSKY

} Examineurs

Ce travail a été fait sous la direction de Monsieur le Professeur L. GAUTHIER, qui m'a donné constamment des conseils et m'a encouragé. Je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à Madame CASTELLE, qui m'a aimablement aidé en toute occasion.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur VICHNIEWSKI et Monsieur le Professeur H. CABANNES qui ont bien voulu faire partie du Jury.

-----○-----



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550215_0061

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

(Mention Sciences)

par

TURCU AUREL

(Roumanie)

-----○-----

1ère. THESE : SOLUTIONS PERIODIQUES ET PRESQUE PERIODIQUES
DE L'EQUATION DE DUFFING.

2ème. THESE : PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE.

soutenues le 4 Juin 1962 devant la Commission d'Examens

Président : Monsieur le Professeur L. GAUTHIER

Examineurs : M. H. CABANNES

M. R. VICHNIEVSKY



(Janvier 1962)

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

- P R O F E S S E U R S -

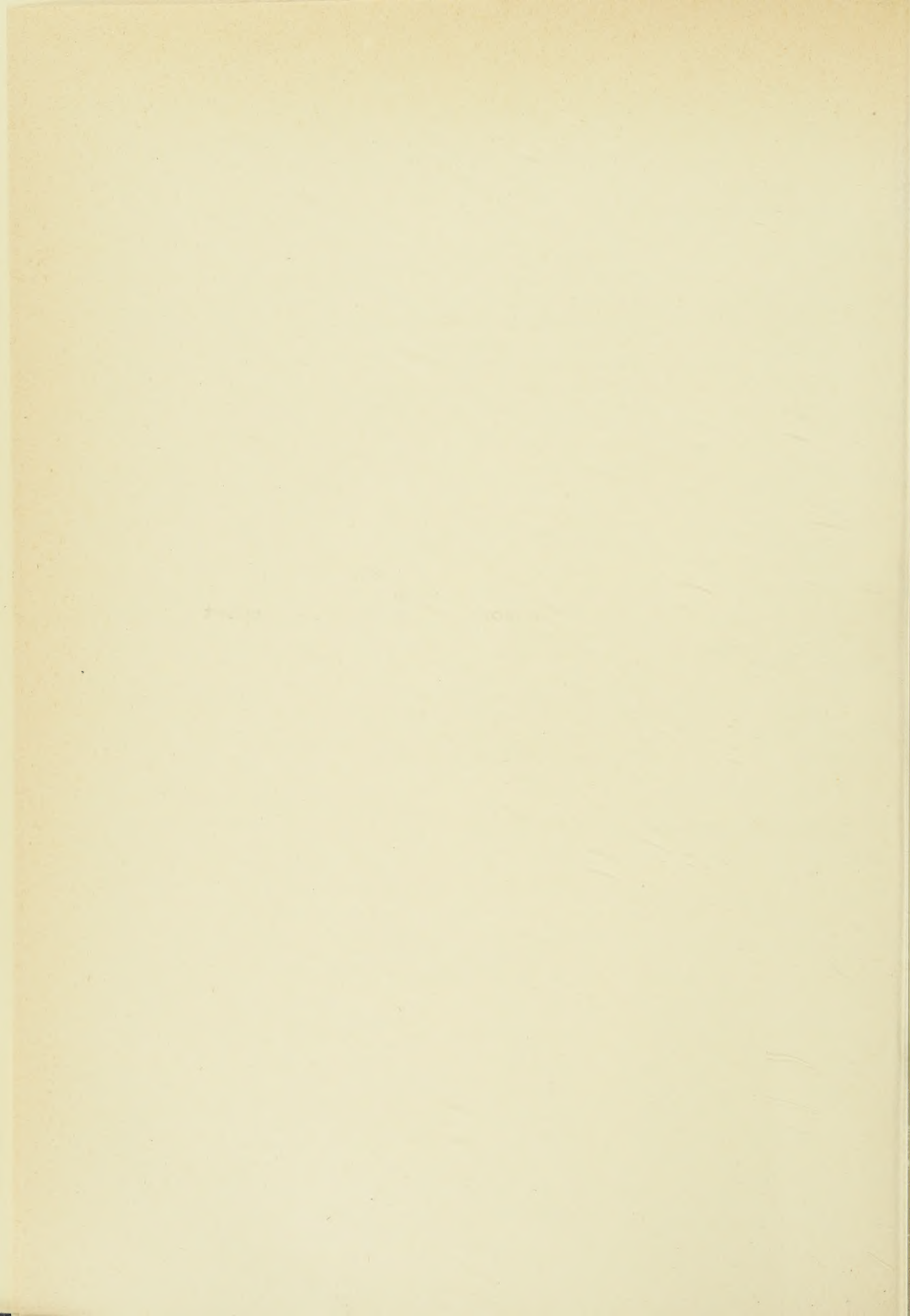
DoyenM. ZAMANSKY.

YB. JULIA	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure	PONCIN	T Mécanique Générale
DE BROGLIE	T Théories physiques	DUBREIL	T Arithmétique et théorie des Nombres
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées	QUELET	T Chimie Organique
		CAGNIARD	T Géophysique appliquée
		CHARPETIER	T Chimie macromoléculaire
		CUVILLIER	T Micropaléontologie
RASSE	T Evolution des êtres organisés	JUNG	T Pétrographie
		TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique
PREVOST	T Chimie organique	WIEMANN	T Chimie organique et Struc.
CHAUDRON	T Chimie appliquée	JACQUINOT	T Spectroscopie et Physique céleste (Orsay)
WYART	T Minéralogie et Cristal	VASSY	T Physique de l'atmosphère
TEISSIER	T Zoologie	DESTOUCHES	T Théories Physiques
MANGENOT	T Biologie Vég. (Orsay)	AMIEL	T Chimie générale
AUGER	T Physique quantique et Relativité	HOCCART	T Minéralogie et Cristallog.
MONNIER	T Physiologie Générale	J.P. MATHIEU	T Physique (Optique)
PIVETEAU	T Paléontologie	COUTEAUX	T Biologie animale (P.C.B.)
POCARD	T Physique (E.N.S.)	MAY	T Zoologie (Orsay)
ARTAN	T Mathématiques (E.N.S.)	CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie
AFFITTE	T Chimie générale	FELDMANN	T Biologie Végétale marine
AVARD	T Géométrie supérieure	GUINIER	T Physique des Solides (Orsay)
DULOMB	T Physique du Globe	JOST	T Physiologie comparée
Mlle COUSIN	T Biologie Animale (SPCN)	FORTET	T Calcul des Probabilités de et Physique mathématique
CHRETIEN	T Chimie minérale	SCHWARTZ	T Calcul diff. et Intégral
DRACH	T Zoologie	SHOUARD	T Physiologie Végétale
KASTLER	T Physique (E.N.S.)	MALAVARD	T Aviation (Techn. Aéronaut.)
EPHRUSSI	T Génétique	BRELOT	T Calcul diff. et intégral
RIVIERE	T Géologie SPCN et sédim.	NORMANT	T Synthèse organique générale
GAUTHERET	T Biologie Vég. (P.C.B.)	BENARD	T Chimie Minérale
LUCAS R.	T Recherches Physiques	BUVAT	T Botanique (E.N.S.)
THOMAS A.	T Biologie cellulaire	DUGUE	T Statistiques Mathématiques
ARNULF	T Optique appliquée	SCULAIRAC	T Psychophysiologie
MORAND	T Physique Enseignement	ULRICH	T Physiologie Végétale
SOLEILLET	T Physique (P.C.B.)	MARECHAL	T Optique théorique et Appl.
FORTIER	T Mécanique exp. des Fluides	KIRRMANN	T Théories Chimiques
DANJON	T Astronomie	CHADEFAUD	T Botanique
PETIT	T Biologie maritime	Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutri.
UENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique	SALEM	T Mathématiques générales
ALLIEN	T Embryologie	LELONG	T Applic. de l'Analyse à la géométrie
CHHORN	T Botanique	DEVILLIERS	T Anatomie et Histologie Comp.
CUGNAC	T Biologie Végétale (SPCN)	EHRESMANN	T Topologie Algébrique
Mlle CAUCHOIS	T Chimie Physique	FRANCON	T Physique (S.P.C.N.)
HELLIER	T Physique du Globe		
HERITIER	T Biologie Générale (Orsay)		
VET	T Radioélectricité (Orsay)		

GLANGEAUD	T Géographie phys. et Géologie dynamique	Mle JOSEIN CHEVALEY	T Chimie S.P.C.N. T Géométrie algébrique et théorie des groupes
GODEMENT	T Mathématiques (M.P.C.)		T Electronique (Orsay)
PISOT	T Tech.Mathém.de la Phys.	ARNOULT	T Physique (Orsay)
ROCH	T Géologie	CHAPELLE	T Mathématiques (Orsay)
SCHATZMAN	T Astrophysique	DELANGE	T Mathématiques Génér.Orsay
TERMIER	T Paléontologie Stratig.	DENY	T Mécan.Théor.des fluides
ZAMANSKY	T Mathématiques générales	GERMAIN	T Géologie
LENNUIER	T Physique (M.G.P.)	LUCAS G.	T Chimie Physique
RIZET	T Génétique (Orsay)	ALLARD	T Phys.Fondamentale des Hautes Energies (Orsay)
ROUTHIER	T Géologie appliquée	BERTHELOT	T Météorologie et Phys. de l'Atmosphère
Mme TONNELAT	T Physique Théorique		T Psychophysiologie
DIXMIER	T Mathématiques (M.P.C.)	BRICART	T Physique des Solides(Ors.)
SOUCHAY	T Chimie générale		Etudes des Méléculaires naturelles complexes
AIGRAIN	T Electrotechnique géné	Mme ALBE-FESSARD	T Biol.Animale (SPCN)Orsay
BRUSSET	T Chimie systématique	FRIEDEL	Physico-chimie des radio-éléments
M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay)	M. JULIA	T Electrochimie
Mme CHAIX	T Chimie biologique	LENDER	T Chimie du métabolisme
Mme HUREL-PY	Biologie Végétale (PCB)	MAGAT	T Physiol.Anim.(Orsay)
PIAUX	T Chimie (M.P.C.)		T Analyse numérique
BRUN	T Mécan.théorique des fluides	Mlle QUINTIN	T Chimie analytique
LEDERER	T Chimie biologie	BENOIT	T Radiochimie
Mme DUBREIL	T Mathén.(Agrégation)	DE POSSEL	T Physiol.Vég.BMPV (Orsay)
Mme LELONG	T Mathématiques (E.N.S.)	CHARLOT	T Chimie M.P.C.(Orsay)
BELLAIR	T Géologie (S.P.C.N.)	HAISSINSKY	T Chimie (P.C.B)
COTTE	T Physique électricité	LEMEE	T Physique Nucléaire(Orsay)
DUBOIS J.E	T Chimie organique	GUERIN	T Physique S.P.C.N. Phys. Théor. des Htes Energies (Orsay)
LAMOTTE	T Zoologie (E.N.S.)	CHATELET M.	T Zoologie (Orsay)
MICHEL A.	T Chimie Minérale (Orsay)	JEAN	T Electronique (Orsay)
OLMER	T Energétique générale	MATTLER	Chimie des Radioéléments (Orsay)
ROUAULT	T Electricité (Orsay)	MICHEL L.	T Thermodynamique et Méc. Physique
GAUTHIER	T Mécanique appliquée		T Géologie appli.s/le Terr.
BARCHEWITZ	T Chimie Physique	BERGERARD	Biol.Animal (P.C.B.)
BROSSEL	T Physique atomique	BERTIN	Botanique tropicale(Orsay)
BUSER	T Physiologie comparée	BOUSSIÉRES	Physiologie générale
CAMUS	T Physiologie Vég.BMPV		Chimie Biol.(Orsay)
CASTAING	T Physique (Orsay)	Mme COUTURE	Biologie animale P.C.B.
CURIEN	T Minéralo.et Cristallog.		Biologie animale SPCN
MOYSE	T Physiologie Végé.(Orsay)	ELLENBERGER	T Géophysique Ionosphère
NOIROT	T Evolution des Etres Org.	FRANC	Botanique
PANNETIER	T Chimie générale (Orsay)	SCHNELL	Physique (M.G.P.)
POSSOMPTES	T Zoologie	STOLKOWSKI	Géologie
PULMANN	T Chimie théorique	ACHER	T Chimie organique (Orsay)
TEILLAC	T Physique Nucl. et radio-activité	BAUDOIN	T Physiologie végétale
TONNELAT	T Biologie Physico-chim.	BEAUMONT	T Calcul des Probabilités.
VILLE	T Econométrie	BLAMONT	
WILLEMART	T Chimie (P.C.B.)	BOURREAU	
DODE	T Chimie (Orsay)	CURIE D.	
FREYMAN	T Recherches Physiques	DURAND-DELGA	
GUINOCHET	T Biol. Vég.SPCN (Orsay)	FREON	
ROLLET	T Chimie (P.C.B.)	HELLER	
		TORTRAT	

CAILLEUX	Géologie (S.P.C.N.)
MAGNAN	T Physique (S.P.C.N.)
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appliq. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
Mlle FOURCROY	Biol. Végétale (SPCN)
Mme CHOQUET-BRUHAT	T Méc. Analytique et Méc. céleste
Mlle VEIL	Physiologie Générale
LWOFF	T Microbiologie
SIESTRUNK	T Mécan. Phys. et Expérim.
LACOMBE	T Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T Physique P.C.B. (Orsay)
CABANNES	T Mécanique générale
LESIEUR	T Mathématiques MPC (Orsay)
MAZET	T Mécanique générale (Orsay)
CAIRE	Géographie phys. et Géol. Dynamiques
COMOLET	T Mécanique des Fluides
CORABOEUF	Physiologie Animale
DELLOUE	Physique de l'exosphère
GORENFLOT	Botanique II (Orsay)
HOUILLON	Biologie Animale P.B.C.
JULLIEN J.	Chimie P.C.B.
MALGRANGE	T Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER	Anthropologie
NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE	Physique ENS. (Orsay)
CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T Mathématiques ENS féminine
KOURGANOFF	T Astronomie (Orsay)
THIRY	T Mécanique céleste

SECRETAIRE GENERAL..... R. POUILLAIN.



LE PROBLEME DE DUFFING

CHAPITRE I

- INTRODUCTION -

I - LE BUT DE LA THESE - CONSIDERATIONS GENERALES.

Dans ce travail, on étudie les vibrations forcées des systèmes lorsque la force de rappel (ou élastique) est non linéaire, dont le mouvement est décrit par l'équation de DUFFING de la forme :

$$(1.1.) \quad \ddot{x} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt + b \cos nt - 2 H \frac{dx}{dt}) , \text{ ou}$$

$$(1.2.) \quad \ddot{x} + k^2 x = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t + \mu (\gamma x^3 - 2 H \frac{dx}{dt}) ,$$

où $\gamma > 0$, $a > 0$, $b \geq 0$, $H \geq 0$ sont des constantes données, μ un petit paramètre réel, m et n des entiers quelconques, ω_1 et ω_2 sont des constantes dont le rapport

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est irrationnel.

On pose le problème de trouver les solutions périodiques de l'équation de Duffing de la forme (1.1) et les solutions presque périodiques de l'équation de Duffing de la forme (1.2) et d'examiner la stabilité de ces mouvements.

Dans le premier chapitre, on expose des méthodes diverses, employées à l'étude de l'équation de Duffing.

Au chapitre II, on fait une étude systématique de l'équation (1.1) en trouvant tour à tour les solutions périodiques pour trois cas :

- 1) pour le cas où l'équation (1.1) est sans amortissement ($H = 0$) et la force perturbatrice contient un seul harmonique ($b = 0$, $a \neq 0$) ;
- 2) pour le cas où l'équation (1.1) a un amortissement ($H \neq 0$) mais aussi $b = 0$;
- 3) pour le cas où l'équation (1.1) a un amortissement ($H \neq 0$) et la force perturbatrice (excitatrice) contient deux harmoniques ($b \neq 0$, $a \neq 0$) (le cas général).

Pour tous ces cas, on trouve trois sortes de solu-

tions périodiques :

a) Solutions de la forme : $x^{(m)}$ (ou $x^{(n)}$)

b) Solutions de la forme : $x^{(0)}$

c) Solutions de la forme : $x^{(rés)}$

On examine la stabilité de toutes ces solutions ainsi que le caractère du développement des vibrations.

Dans le dernier paragraphe du deuxième chapitre, on trouve les solutions sous-harmoniques du $\frac{1}{m}$ ordre pour le cas 2).

Au chapitre III, on trouve les vibrations presque-périodiques des systèmes décrits suivant l'équation quasi-linéaire de Duffing (1.2). On a trouvé dans ce cas toutes les vibrations presque-périodiques dans le cas de non-résonance aussi bien que dans le cas de la résonance et on a étudié leur stabilité.

Pour la solution des problèmes soulevés dans les deux derniers chapitres dont on a parlé ci-dessus, on a utilisé la méthode de POINCARÉ [75], dans son développement ultérieur donné par MALKIN [66] et [67].

Etant donné les multiples applications dans les systèmes vibratoires mécaniques et électriques, le problème de Duffing a attiré l'attention de beaucoup de chercheurs (Voir Bibliographie). Dans la plupart des cas étudiés, l'équation de Duffing peut être considérée comme un cas particulier de l'équation :

$$(1.3) \quad \ddot{x} + k^2 x = \mu f(t, x, \dot{x}, \mu),$$

ou de l'équation :

$$(1.4) \quad \ddot{x} + 2\mu H \dot{x} + k^2 x + \mu g(x) = \mu f(t)$$

où μ est un petit paramètre réel (d'habitude supposé non négatif); $f(t, x, \dot{x}, \mu)$ une fonction continue, périodique par rapport à t , fonction qui représente (d'habitude) une somme finie de sinus et de cosinus dont les coefficients sont des polynômes par rapport à x et $\dot{x}$; $H > 0$ est une constante ;

$k^2 x + \mu g(x)$ est une fonction non linéaire représentant le terme général de la force de rappel ($x g(x) \geq 0$). Le problème a été étudié tant à l'aide des méthodes analytiques que par les méthodes topologiques.

Dans ce qui suit (ch. I), on essaiera de donner quelques renseignements en ce qui concerne les résultats et les mé-

thodes analytiques diverses, utilisées à l'étude de l'équation de Duffing, considérée comme équation quasi-linéaire. On donnera des renseignements quant à l'existence, l'approximation et la stabilité des solutions périodiques, en insistant sur les procédés pratiques de calcul des vibrations de Duffing.

D'après la théorie des équations différentielles [18, 104 - 107], on sait que l'équation (1.3) ou (1.4) possède une solution qui serait unique si les conditions initiales : $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ étaient données à l'instant $t = 0$; mais on étudiera seulement divers types de solutions périodiques.

Les méthodes approchées [88, 18, 14, 47, 67, 29, 56, 75] utilisées peuvent être rapportées, soit aux méthodes basées sur le développement d'après le petit paramètre (nommé aussi méthode de perturbation), soit aux méthodes d'approximation successives (méthode d'itération). Chacune de ces méthodes peut être appliquée au moins de deux façons différentes. Ainsi, on peut d'abord opérer directement avec l'équation différentielle en appliquant soit la méthode du développement d'après le petit paramètre, soit la méthode d'approximations successives. Deuxièmement, étant donné que la solution cherchée est supposée toujours périodique, on peut la chercher sous la forme d'une série de Fourier à coefficients indéterminés, et après on résoudra les relations non-linéaires qui doivent être satisfaites par ces coefficients, par la méthode d'approximations successives ou par la méthode du développement suivant le petit paramètre.

Définitions -

1) Soit $x(t)$ une solution périodique de l'équation (1.3), et soit T la période minima de la fonction $f(t, x, \dot{x}, \mu)$. Si T est aussi la période minima de la solution $x(t)$, alors $x(t)$ s'appelle vibration harmonique. Soit $p > 1$ et $q > 1$ deux nombres entiers sans diviseurs communs. Si pT ou $\frac{T}{p}$ ou $\frac{pT}{q}$ est la période minima de $x(t)$ alors $x(t)$ s'appelle respectivement sous-harmonique d'ordre p , ultra-harmonique d'ordre $\frac{1}{p}$ ou ultra sous-harmonique d'ordre $\frac{p}{q}$ (STOKER [88]).

D'après J.L. MASSERA et autres auteurs, on appellera harmoniques toutes les solutions constantes et toutes les solutions périodiques $x(t)$ qui ont la période T , même si leur période minima est $\frac{T}{p}$, $p = 1, 2, \dots$, et sous-harmoniques d'ordre q , toutes les solutions $x(t)$ qui ont la période qT , $q > 0$ et dont la période n'est pas un multiple de T , même si la période minima est $\frac{qT}{p}$, $p = 1, 2, \dots$; q et p n'ont pas de diviseurs communs. MASSERA [74] a démontré que pour une solution périodique $x(t)$ d'un système périodique il n'est pas besoin d'avoir la période dans un rapport rationnel avec T - Voir aussi [67].

D'après MANDELSTAM et PAPAGEORGIOU [72], le phénomène observé dans le cas des systèmes quasi-linéaires, quand $x(t)$ a la période égale à pT , s'appelle résonance d'ordre p , et les vibrations, sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{p}$. En ce qui concerne l'existence et le nombre des solutions harmoniques et sous-harmoniques, on peut consulter les notes de MASSERA et de N. LEVINSON, cités en [18].

2) Si les équations (1.3) et (1.4) ne contiennent pas explicitement le temps t , elles s'appellent autonomes; dans le cas contraire, elles s'appellent non-autonomes.

3) Les équations obtenues de (1.3) et (1.4), lorsqu'on met $\mu = 0$, seront appelées "équations génératrices", et leurs solutions correspondantes, solutions génératrices.

On étudiera seulement les solutions harmoniques et sous-harmoniques pour les systèmes non-autonomes.

Chaque solution de l'équation génératrice

$$(1.5) \quad \ddot{x}_0 + k^2 x_0 = 0$$

est de la forme :

$$(1.6) \quad \begin{cases} a) & x_0 = A_0 \cos kt + B_0 \sin kt, \text{ ou} \\ b) & x_0 = A \cos (kt + \varphi), \end{cases}$$

où A_0 et B_0 (A, φ) sont des constantes arbitraires qui peuvent être déterminées par les conditions initiales. Par conséquent, quelle que soit la solution génératrice (1.6) de l'équation (1.5), elle sera périodique.

Quoique, pour μ petit, les solutions de l'équation (1.3) ou (1.4) puissent très peu différer des solutions de l'équation (1.5), on ne peut pas affirmer avec certitude que (1.3) ou (1.4) ait des solutions périodiques dans le voisinage d'une solution périodique arbitraire de l'équation génératrice. Ce fait important rend peut-être le problème d'existence des solutions périodiques beaucoup plus difficile qu'il ne paraîtrait à première vue (Voir l'idée de la méthode de POINCARÉ).

Ensuite, pour préciser les choses, mettons que

$$(1.7) \quad \begin{cases} f(t, x, \dot{x}, \mu) = -2H\dot{x} - \gamma x^3 + \lambda \cos \omega t \\ g(x) = \gamma x^3, \quad f(t) = \lambda \cos \omega t \end{cases}$$

c'est-à-dire supposons que la force de rappel soit $-(k^2 x + \mu \gamma x^3)$, la force d'amortissement $-\mu H \dot{x}$ et la

force excitatrice $\mu \lambda \cos \omega t$ (cela se reflète un peu sur les conclusions générales). Donc, l'équation obtenue, connue sous le nom d'équation de Duffing (le premier qui ait donné une solution harmonique ayant utilisé la méthode d'itération) sera :

$$(1.8) \quad \ddot{x} + 2 \mu H \dot{x} + (k^2 x + \mu \gamma x^3) = \mu \lambda \cos \omega t$$

Les différences qualitatives essentielles entre les mouvements périodiques, qui sont déterminées par le caractère des forces élastiques, dépendent, avant tout, de la différence entre les forces élastiques rigides ($\gamma > 0$) et molles ($\gamma < 0$).

II - LA METHODE DE DUFFING - VIBRATIONS HARMONIQUES SANS AMORTISSEMENT.

On montrera [88] comment on trouve les vibrations harmoniques par la méthode d'approximations successives proposée par DUFFING [29], en supposant que l'amortissement manque ($H = 0$). Dans ce cas, l'équation (1.8) aura la forme :

$$(2.1) \quad \ddot{x} = -k^2 x - \mu \gamma x^3 + \mu \lambda \cos \omega t.$$

Comme première approximation⁽¹⁾ de la solution cherchée, on prend :

$$x_0 = A \cos \omega t$$

En remplaçant cette expression dans la partie droite de (2.1) on obtient :

$$(2.2) \quad \ddot{x}_1 = - (k^2 A + \frac{3}{4} \mu \gamma A^3 - \mu \lambda) \cos \omega t - \frac{1}{4} \mu \gamma A^3 \cos 3 \omega t$$

En intégrant deux fois l'équation (2.2), on obtient l'expression suivante :

$$(2.3) \quad x_1 = \frac{1}{\omega^2} (k^2 A + \frac{3}{4} \mu \gamma A^3 - \mu \lambda) \cos \omega t + \mu \frac{1}{36} \frac{\gamma A^3}{\omega^2} \cos 3 \omega t$$

Pour assurer la périodicité de $x_1(t)$ et aussi bien de l'approximation suivante $x_2(t)$, on prend les constantes d'intégration égales à zéro.

Ici, la méthode d'approximations successives est basée sur les substitutions d'approximations successives dans la

(1) En réalité $x_0 = A \cos \omega t$ devrait être considéré la douzième approximation et $x = 0$ comme première approximation.

partie droite de (2.1) , pour la convergence des approximations, il est nécessaire que les constantes k^2 , $\mu\gamma$, A et $\mu\lambda$ soient, en général, suffisamment petites. Plus bas, cette restriction pour k^2 et A disparaîtra⁽¹⁾, mais $\mu\gamma$ devra être considéré partout comme petit ; cette dernière restriction suppose que la force élastique soit quasi-linéaire. D'habitude, on suppose que $\mu\lambda$ est du même ordre de grandeur que $\mu\gamma$, ou autrement dit, que le mouvement se passe dans le voisinage des vibrations linéaires propres (libres) du système ; cette dernière restriction n'est pas trop essentielle (Voir par. 7, B. Remarque).

Cette méthode n'est pas très claire en ce qui concerne la suite des calculs. La voie la plus naturelle pour la suite paraît être la continuité du procédé, c'est-à-dire qu'il faut remplacer $x_1(t)$ dans la partie droite de (2.1) pour calculer $x_2(t)$, etc.

Le sens d'un tel procédé peut être expliqué à l'aide de la courbe des amplitudes, qui donne pour chaque valeur de l'amplitude de la force perturbatrice, la dépendance entre l'amplitude des vibrations et la fréquence (en réalité la pulsation). Étant donné que $\mu\gamma$ est supposé petit, ces courbes doivent se trouver dans le voisinage des courbes correspondantes pour les vibrations des forces linéaires. Dans la figure 1, on a le dessin schématique des courbes d'amplitude tant pour les vibrations linéaires (en pointillés) que pour les vibrations non-linéaires. D'accord avec les remarques faites plus haut, le schéma des approximations successives imaginé est capable de donner des courbes d'amplitude exactes seulement pour $|A|$ suffisamment petites, c'est-à-dire dans le voisinage de l'axe ω (Fig. 1). Il en ressort clairement que dans le voisinage de la valeur $\omega = k$ apparaissent des difficultés. En dehors de cela, le schéma proposé suppose que ω est fixe, et l'amplitude doit être, dans ce cas, déterminée comme fonction de ω , ce qui fait que l'obtention de la forme réelle des courbes d'amplitudes soit difficile ou même impossible.

La méthode d'approximations successives proposée par DUFFING diffère dans une certaine mesure : si $x_0 = A \cos \omega t$ est réellement la première approximation convenable, on prend alors le coefficient A_1 de $\cos \omega t$ de (2.3) égal à A (amplitude de la première approximation), parce que A_1 ne doit pas trop différer de A . Cela conduit à la relation suivante :

$$(2.4) \quad \omega^2 = k^2 + \mu \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 - \frac{\lambda}{A} \right)$$

(1) C'est la raison pourquoi nous avons marqué, envers STOKER [88], les autres grandeurs par $\mu\gamma$ et $\mu\lambda$.

entre la fréquence ω et "l'amplitude" A de la solution périodique.

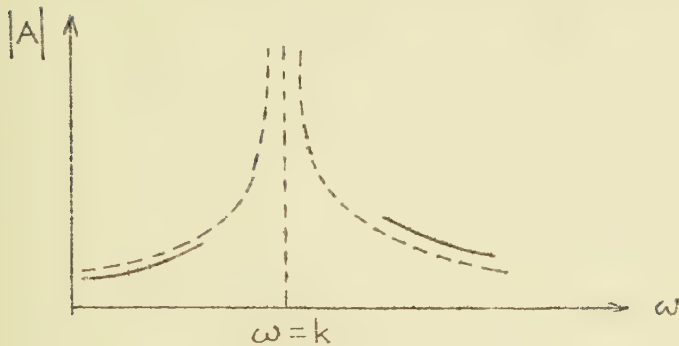


Fig. 1 - Forme schématique de la courbe d'amplitudes.

La relation (2.4) est fondamentale pour la recherche ultérieure : elle permet de considérer ω^2 comme une fonction donnée de l'amplitude A dont la valeur doit être donnée.

On déduira à nouveau (2.4) par la méthode d'approximations successives, qui diffère dans une certaine mesure de la méthode de Duffing, et qui a l'avantage que la constante élastique k^2 n'est pas supposée petite. Dans ce but,

l'équation de départ sera :

$$(2.5) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - k^2) x - \mu \gamma x^3 + \mu \lambda \cos \omega t$$

qui diffère de (2.1) par $\omega^2 x$ ajouté dans les deux parties de l'équation (2.1).

On commencera les approximations successives de la solution de l'équation (2.5) par les vibrations linéaires propres (libres) de fréquence $\omega = k$ ($\omega^2 = k^2$, $\mu = 0$). On prend donc comme première approximation $x_0 = A \cos \omega t$, où "l'amplitude" A est supposée donnée⁽¹⁾.

En remplaçant x_0 dans la partie droite de (2.5), on obtient l'équation :

$$(2.6) \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = [(\omega^2 - k^2)A - \mu \frac{3}{4} \gamma A^3 + \mu \lambda] \cos \omega t - \frac{1}{4} \mu \gamma A^3 \cos 3 \omega t$$

d'où on détermine la deuxième approximation x_1 . L'équation (2.6) correspond au cas de résonance parce que la partie droite contient le terme $P_1 \cos \omega t$, pareil à celui qui se trouve dans la solution de l'équation homogène. Pour que la solution

(1) A la première approximation on peut ajouter le terme $B \sin \omega t$, mais celui-ci doit être égal à zéro (aussi $A_n \cos n \omega t$, où n est un nombre impair) comme on le verra tout à l'heure).

de l'équation (2.6) soit périodique, il est nécessaire que

$$(2.7) \quad \boxed{\omega^2 = k^2 + \mu \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 - \frac{\lambda}{A} \right)}$$

relation qui coïncide à l'égalité de Duffing (2.4). Si la relation (2.7) est satisfaite, alors la solution de l'équation (2.6) aura la forme :

$$(2.8) \quad x_1(t) = A_1 \cos \omega t + \mu \frac{\gamma A^3}{32 \omega^2} \cos 3 \omega t$$

La deuxième approximation reste indéterminée si la valeur de la constante arbitraire A_1 n'est pas choisie ; d'après DUFFING, on prend A_1 égale à l'amplitude A de la première approximation $x_0 = A \cos \omega t$ et on fera la même chose dans toutes les approximations ultérieures. Par conséquent, si l'on prend pour ω^2 l'expression (2.7), l'équation (2.8) donnera :

$$(2.9) \quad x_1(t) = A \cos \omega t + \mu \frac{\gamma A^3}{32 \left[k^2 + \mu \left(\frac{3}{4} A^2 - \frac{\lambda}{A} \right) \right]} \cos 3 \omega t$$

Remarque - La méthode conduit à de bons résultats quoique ce procédé, pour définir la grandeur ω^2 par (2.7) comme fonction de A (donné) soit inaccoutumé.

Pour la détermination de $x_2(t)$ on remplace $x_1(t)$ (2.8) dans la partie droite de l'équation (2.5), qui conduira à une équation de la forme :

$$(2.10) \quad \ddot{x}_2 + \omega^2 x = P_2 \cos \omega t + Q_2 \cos 3 \omega t + R_2 \cos 5 \omega t + \dots$$

où P_2 , Q_2 , etc... représentent certaines expressions qui contiennent A et ω . Pour assurer la périodicité de $x_2(t)$ on met $P_2 = 0$, qui conduit à une relation plus exacte entre A et ω , analogue à (2.7). Après l'annulation de P_2 , l'intégration de l'équation (2.10) donne la solution périodique où on prend $A \cos \omega t$ comme terme fondamental, et ω est remplacé par l'expression donnée par $P_2 = 0$.

Pour la justification de la méthode d'approximations successives, on analysera la relation (2.7), qui donne, dans le plan ω , A , une famille de courbes où l'amplitude de la force perturbatrice joue le rôle de paramètre.

III - LES COURBES DE RESONANCE OU LES COURBES D'AMPLITUDE.

Les courbes données par la relation (2.7) dans le plan ω , A , s'appellent courbes de résonance, ou courbes d'amplitude (ou amplitudes-fréquences). Pour $\gamma = 0$, les courbes se réduisent aux courbes (connues) de résonance des vibrations forcées linéaires.

Pour comprendre le procédé d'approximations successives, il était important de considérer ω comme une fonction de A . Plus loin, pour la construction des courbes de résonance A est porté en ordonnée et on appellera son module $|A|$, amplitude des vibrations non linéaires (en réalité A représente le premier coefficient dans le développement de $x(t)$ en série de Fourier). Pour la commodité de la construction, on construira d'abord (dans le plan ω^2 , A) la courbe (parabole) :

$$(3.1) \quad \omega^2 = k^2 + \frac{3}{4} \mu \gamma A^2$$

et séparément la famille de courbes (hyperboles) :

$$(3.2) \quad \omega^2 = - \frac{\mu \lambda}{A}$$

pour différentes valeurs positives de λ . Pour le cas $\gamma > 0$ ces courbes sont représentées sur la figure 2 a), où $\lambda_j > \lambda_i$ si $j > i$. En ajoutant les abscisses de la courbe (3.1) aux abscisses des courbes (3.2), on obtient les courbes (2.7) (Fig. 2b)).

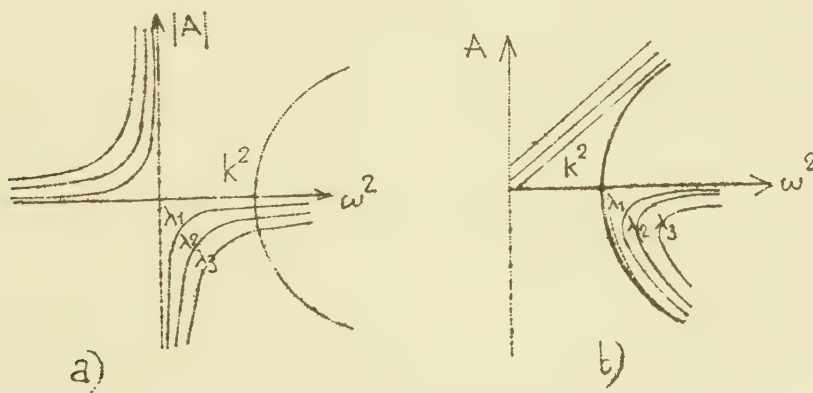


Fig. 2 - Construction des courbes de résonance.

Pratiquement, nous désignons ces courbes pour $|A|$ (fig. 3) où A est négatif, sur les courbes placées à droite de la courbe $\lambda = 0$, et positif sur les courbes placées à gauche (fig. 3).

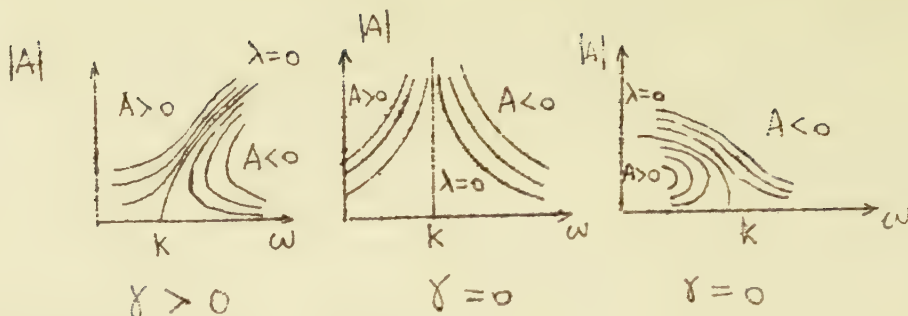


Fig. 3 - Courbes de résonance pour la force élastique rigide, linéaire et molle.

Cela signifie que, dans l'approximation considérée, le mouvement et la force extérieure sont en phase ou déphasés de 180° suivant que la fréquence des vibrations libres est, respectivement, plus grande ou plus petite que la fréquence des vibrations libres pour la valeur particulière donnée de l'amplitude. Sous ce rapport, les vibrations non linéaires se comporteront aussi de la même façon que les vibrations linéaires. On remarque que les courbes de résonance dans les cas non linéaires s'obtiennent comme si on courbait les courbes de résonance correspondantes du cas linéaire, à droite (pour $\gamma > 0$) ou à gauche (pour $\gamma < 0$). Il est maintenant clair pour quelle raison ω doit être considéré comme une fonction de grandeur donnée A . Le problème consiste en ce que, pour une valeur certaine ω , correspondent trois valeurs de A ; c'est pourquoi la première méthode d'approximations successives donnée plus haut (quoiqu'elle paraisse complètement naturelle) ne peut pas donner toutes les branches des courbes d'amplitudes. En appliquant cette méthode, nous avons commencé par les vibrations linéaires libres, considérées comme première approximation, en faisant $\omega = k$.

$\lambda = 0$ et $\gamma = 0$. En remplaçant cette première approximation en (2.5), on est arrivé à la solution qui est donnée sur la figure 4; et puisque A dans le problème linéaire est une grandeur arbitraire, il fallait alors la donner d'avance. Voilà pourquoi la méthode de Duffing conduit, dans le problème donné, à des résultats qui ne pouvaient pas être trouvés par les précédents chercheurs (y compris RAYLEIGH).

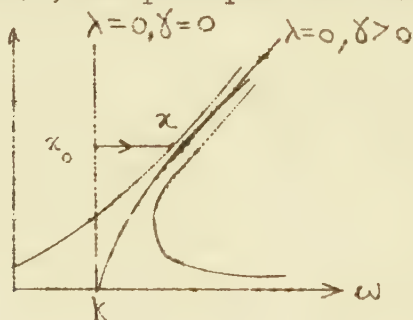


Fig. 4 - Schéma correspondant à l'approximation du départ.

Dans le cas des vibrations libres ($\lambda = 0$) la relation (2.7) devient :

$$\omega^2 = k^2 + \mu \frac{3}{4} \gamma A^2$$

qui donne, pour le cas linéaire

($\gamma = 0$) la relation exacte : $\omega = k$.

Les courbes de résonance pour les systèmes dont les forces de rappel sont non-linéaires, ont été vérifiées expérimentalement pour divers cas. La vérification a démontré une bonne concordance entre l'expérience et la théorie exposée ci-dessus. Parmi les premières expériences, rappelons l'expérience de MARTIENSSEN [73] et celle de DUFFING [29] .

Remarques :

1) MCLACHLAN [53] résoud le problème de Duffing à l'aide des séries de Fourier. Après certaines restrictions, il emploie aussi la méthode d'approximations successives et prend comme première approximation une expression de deux termes (harmoniques). Pour (2.1) la première approximation serait⁽¹⁾ :

$$(3.3) \quad x_0 = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3 \omega t$$

où $|A_2| \ll A_1$ (cette restriction fait que la méthode utilisée est plus rapprochée de celle du par. 5).

On calcule d'abord :

$$\ddot{x} = -\omega^2 (A_1 \cos \omega t + 9 A_3 \cos 3 \omega t) ,$$

$$k^2 x = k^2 (A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3 \omega t) ,$$

$$\mu \gamma x^3 = \frac{\mu \gamma}{4} [3 A_1^2 (A_1 + A_3) \cos \omega t + A_1^2 (A_1 + 6 A_3) \cos 3 \omega t]$$

où les termes en $\cos 5 \omega t$, $\cos 7 \omega t$, $\cos 9 \omega t$ ont été omis. En remplaçant ces expressions en (2.1), et en égalant les coefficients de $\cos \omega t$ et de $\cos 3 \omega t$, on obtient les relations :

$$(3.4) \quad (k^2 - \omega^2) A_1 + \mu \frac{3}{4} \gamma A_1^2 (A_1 - A_3) = \mu \lambda$$

$$(3.5) \quad (k^2 - \omega^2) A_3 + \mu \frac{\gamma A_1^2}{4} (A_1 + 6 A_3) = 0$$

De (3.4) on obtient approximativement :

$$(3.6) \quad \omega^2 \approx k^2 + \mu \left(\frac{3}{4} \gamma A_1^2 - \frac{\lambda}{A_1} \right)$$

(1) Dans (5.3), $x_0 = a_1 \sin \omega t + a_3 \sin 3 \omega t$ car la force extérieure est un sinus .

(la relation d'amplitude-fréquence (2.7)) et aussi l'expression du coefficient A_3 :

$$(3.7) \quad A_3 = -\mu \frac{\gamma A_1^3}{4(k^2 - 9\omega^2 + \mu \frac{3\gamma A_1^2}{2})}$$

qui, en vertu de (3.6), devient :

$$(3.8) \quad A_3 = \mu \frac{\gamma A_1^3}{32k^2 + \mu(21\gamma A_1^2 - \frac{36\lambda}{A_1})}$$

2) ATKINSON [6]a, en considérant l'équation de Duffing d'un ressort dont la raideur décroît avec l'amplitude :

$$(3.9) \quad \ddot{x} + x - \frac{4}{3}x^3 = \lambda \cos \omega t,$$

cherche la solution sous la forme d'une expression à trois harmoniques :

$$(3.10) \quad x(t) = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t + A_5 \cos 5\omega t.$$

En utilisant la méthode de RITZ-GALERKIN, les auteurs ont obtenu trois équations algébriques entre les grandeurs A_1 , A_3 , A_5 , λ et ω^2 . En donnant diverses valeurs à λ et en considérant la valeur de A_1 (le coefficient du terme fondamental) donnée, on calcule les valeurs correspondantes de A_3 , A_5 et ω^2 et on construit les diagrammes des coefficients A_1 , A_3 , A_5 comme fonctions de ω^2 ⁽¹⁾. On donne une analyse détaillée de ces diagrammes et on la compare à la solution exacte. On indique l'insuffisance de l'approximation d'un seul harmonique (pour les petites valeurs de ω^2).

Pour les autres aspects du problème, on peut consulter les notes [30, 85, 86, 98, 8, 44].

IV - L'INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT SUR LES VIBRATIONS FORCÉES.

En tenant compte de l'influence de la résistance ($H > 0$ supposée petite), l'équation de Duffing devient :

$$(4.1) \quad \ddot{x} + 2\mu H \dot{x} + (k^2x + \mu\gamma x^3) = \mu\lambda \cos(\omega t + \Psi) = \mu(F \cos \omega t - G \sin \omega t)$$

(1) La machine à calculer était I.B.M. 701 - Californie - Univ.

où $\mu\lambda = \mu\sqrt{F^2 + G^2}$, l'amplitude de la force extérieure est donnée, et Ψ (ou le rapport $\frac{G}{F}$) - l'angle de phase - reste à déterminer, considérant que la phase est donnée. Si l'on prend, à l'aide de la méthode d'approximations successives $x_0 = A \cos \omega t$ (où A est une quantité donnée et ω doit être déterminée) comme première approximation, après sa substitution en (4.1), en négligeant le terme en $\cos \omega t$ et après identification des coefficients de $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$, on obtiendra les équations :

$$(4.2) \quad (k^2 - \omega^2) A + \mu \frac{3}{4} \gamma A^3 = \mu F$$

$$(4.3) \quad 2 \mu H \omega A = \mu G$$

Ces équations démontrent qu'en présence de l'amortissement, mais en l'absence de la force extérieure, les mouvements périodiques ne peuvent pas exister (excepté l'état de repos), parce que si $H \neq 0$, pour $F = G = 0$, on aura $A = 0$.

La relation entre l'amplitude de la force extérieure $\mu\lambda$ et les quantités A et ω s'obtient de (4.2) et (4.3) :

$$(4.4) \quad \left[(k^2 - \omega^2) A + \mu \frac{3}{4} \gamma A^3 \right]^2 + 4 \mu^2 H^2 \omega^2 A^2 = \mu^2 \lambda^2 = \mu^2 (F^2 + G^2)$$

et sert à la représentation graphique des courbes de résonance sous l'influence de la résistance.

Puisque la quantité $2 \mu H$ est petite, les courbes (4.4) seront peu différentes des courbes (2.7) (Fig. 5), et dans ce cas les courbes fléchissent dans le voisinage de la courbe $\lambda = 0$.

Les diagrammes de résonance (4.4) sont représentés schématiquement sur la figure 5.

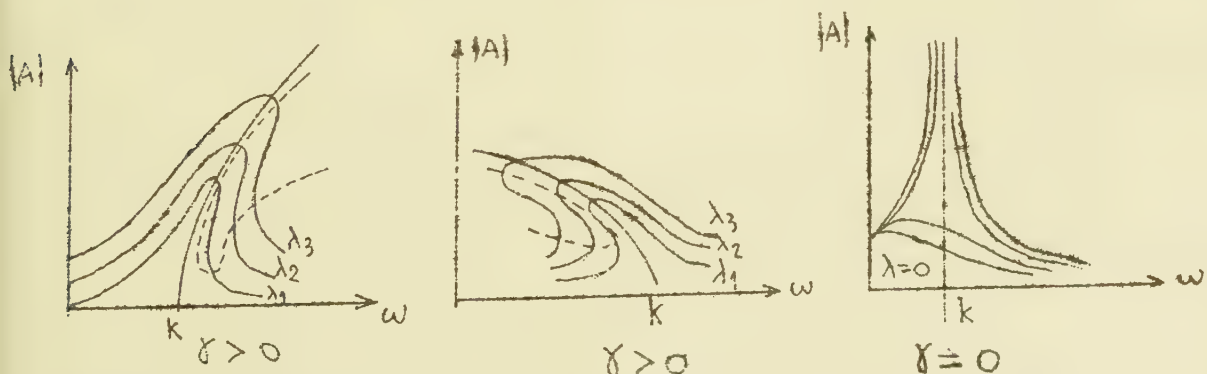


Fig. 5 - Courbes de résonance dans le cas d'amortissement visqueux.

On remarque aussi que les courbes ci-dessus s'établissent à partir des courbes de résonance linéaire en les fléchissant vers la droite ou vers la gauche, selon le caractère de la raideur. Les courbes en pointillés de la Fig. 5, représentant le lieu géométrique des points où les tangentes des courbes sont horizontales, s'obtiennent en dérivant (4.4) par rapport à ω et en faisant $\frac{dA}{d\omega} = 0$:

$$(4.5) \quad k^2 - \omega^2 + \mu \frac{3}{4} \gamma A^2 = 2 \mu^2 H^2$$

Ceci représente, dans le plan A, ω^2 une parabole très rapprochée de courbe de résonance des vibrations libres.

Le lieu géométrique des points où les tangentes des courbes sont verticales s'obtient en dérivant (4.4) par rapport à A et en faisant $\frac{d\omega}{dA} = 0$:

$$(4.6) \quad (k^2 - \omega^2 + \mu \frac{3}{4} \gamma A^2) (k^2 - \omega^2 + \mu \frac{9}{4} \gamma A^2) + 4 \mu^2 A^2 \omega^2 = 0$$

En l'absence d'amortissement ($H = 0$), on obtiendra deux courbes (des paraboles dans le plan ω^2, A) (Fig. 6), parmi lesquelles la première représente la courbe de résonance des vibrations libres non amorties, et la seconde le lieu géométrique des points où les tangentes des courbes de la figure 3 sont verticales.

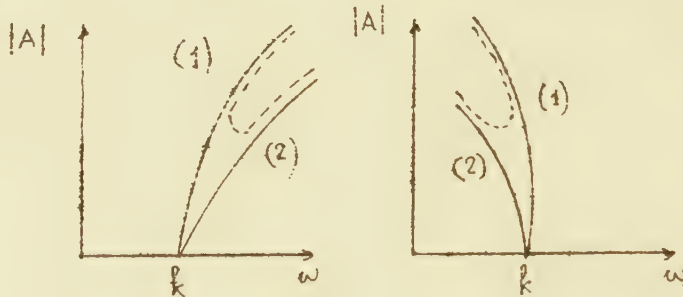


Fig. 6 - Lieu géométrique des points où les tangentes des courbes de résonance sont verticales.

Les courbes (4.6), c'est-à-dire le lieu géométrique des points où les tangentes des courbes de résonance sont verticales, représentent dans le plan ω^2, A^2 une hyperbole qui a la forme en pointillé de la figure 6.

D'autre part, en portant la première approximation $x_c = A \cos \omega t$ (où A est donnée par (4.4) pour une valeur déterminée de c) dans l'équation (4.1), en tenant compte de

(4.2), (4.4) et en utilisant la méthode de Duffing, on trouve [51]_a :

$$(4.7) \quad x = A \cos \omega t + \mu \frac{\gamma A^3}{36 \left[k^2 + \mu \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 - \frac{\lambda}{A} \right) \right]} \cos 3 \omega t$$

Remarques :

1) LOUD [57], s'appuyant sur les résultats de CARTWRIGHT [15], déduit les conditions suffisantes d'existence des solutions uniques, périodiques de l'équation de Duffing avec amortissement :

$$(4.8) \quad \ddot{x} + H \dot{x} + x + \gamma x^3 = p(t) \quad (H > 0, \gamma > 0, \max |p(t)| = 1)$$

2) A.M. KAC [50, 49], utilisant la méthode de KRYLOV-BOGOLJUBOV, cherche les solutions approchées de l'équation :

$$(4.9) \quad \ddot{x} + H \dot{x} + x + x^3 = \lambda \sin \Omega t \quad (\Omega = m \omega)$$

sous la forme d'une somme de deux harmoniques dont une a la même fréquence que la force excitatrice, et l'autre une fréquence différente).

Il démontre qu'il est possible d'obtenir les vibrations biharmoniques de 4 types :

$$(4.10) \quad x = A \sin (\Omega t + \varphi) + B \sin (3 \Omega t + \varphi) \quad (3/1)$$

$$x = A \sin (\frac{1}{3} \Omega t + \varphi) + B \sin (\Omega t + \varphi) \quad (1/3)$$

$$x = A \sin (\Omega t + \varphi) + B \sin (2 \Omega t + \varphi) + c \quad (2/1)$$

$$x = A \sin (\frac{1}{2} \Omega t + \varphi) + B \sin (\Omega t + \varphi) + c \quad (1/2)$$

(où $3/1, 1/3 \dots$ (ordre de vibration)).

Pour chaque forme de solution, on forme les équations qui déterminent les quantités A, B, C, φ et ω comme fonction de Ω, λ et H . Pour les vibrations sans amortissement ($H = 0$) dans tous les cas on représente graphiquement les quantités A, B et C comme fonctions de Ω et $\lambda = 0,5, 1,5$.

Pour les vibrations avec amortissement ($3/1, 1/3$) on donne les graphiques des quantités A et B comme fonctions de Ω ($k = 0,05$) et des valeurs diverses de λ .

3) Un procédé intéressant permettant de résoudre ce problème avec une précision suffisante par les approximations successives a été indiqué par RAUSCHER. A l'aide de ce procédé le problème se ramène à un problème de vibrations libres qui s'intègre en quadrature [88, 104].

4) Une discussion sur les formes des courbes de résonance peut être trouvée dans [1, 2]; comme des méthodes d'intégration, on peut consulter "La méthode d'itération de [82] et la méthode numérique de [22]".

V - METHODE DU PETIT PARAMETRE (ou de la perturbation) - L'IDEE DE LA METHODE DE POINCARÉ.

La méthode du petit paramètre, appliquée notamment aux équations différentielles quasi-linéaires, consiste à chercher la solution sous la forme d'une série suivant les puissances du petit paramètre (μ). Dans ce cas, on détermine les coefficients des puissances de μ l'un après l'autre, d'habitude, par les solutions successives d'équations linéaires. La méthode s'utilise pour démontrer l'existence, la convergence et la stabilité des solutions périodiques. La méthode est particulièrement liée aux noms de POINCARÉ et LIAPOUNOFF, qui ont élaboré l'appareil mathématique correspondant, qui n'est pas lié spécialement aux systèmes conservatifs de l'appareil de la théorie de perturbation (élaboré par les astronomes dans la recherche du mouvement des planètes). Il s'agit de la théorie des équations différentielles à coefficients périodiques, élaborée par LIAPOUNOFF, et de la théorie locale des solutions périodiques de Liapounoff-Poincaré. Dans cette dernière théorie, on considère comme systèmes non linéaires différentiels généraux ceux qui contiennent le petit paramètre μ qui, pour $\mu = 0$, possèdent des solutions périodiques, et on établit des critères explicites de l'existence et de la stabilité des solutions périodiques pour les petites valeurs de $\mu \neq 0$. Les méthodes de LIAPOUNOFF et de POINCARÉ sont des méthodes rigoureusement justifiées et elles sont convenables tant pour la recherche quantitative que pour la recherche qualitative - Voir [61, 75, 76, 72, 3, 100, 65-71, 11, 88-94, 110, 32-34, etc...] .

Compte tenu de l'importance de cette méthode, on exposera brièvement l'idée de la méthode de POINCARÉ.

Considérons les systèmes physiques décrits suivant les équations différentielles de la forme :

$$(5.1) \quad \frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n), \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

où X_s sont des fonctions continues, périodiques par rapport à t , ayant, disons, la période 2π (X_s peut aussi ne pas contenir le temps). Le problème qui se pose est de trouver les

vibrations périodiques du système, vibrations auxquelles correspondent des solutions périodiques particulières des équations (5.1) de la forme :

$$x_s = f_s(t) , \quad (f_s(t) - \text{fonctions périodiques})$$

en supposant que la solution générale de l'équation (5.1) soit inconnue.

Pour résoudre le problème posé on utilise souvent la méthode suivante : on sépare un groupe quelconque de termes considérés petits sans une valeur essentielle pour le problème donné, on le rejette et on obtient un système d'équations plus simples.

Après la solution du système simplifié, on se limite à la solution obtenue ou bien en la considérant comme première approximation on revient aux équations initiales et on leur applique une méthode d'approximations successives, spécialement élaborée pour le problème donné.

Ce procédé est à la base de la méthode de POINCARÉ pour trouver les solutions périodiques. Pour donner au problème une justification mathématique, POINCARÉ a introduit soit-disant "le petit paramètre" . En supposant que X_s dépende analytiquement, par rapport à μ , pour les valeurs suffisamment petites de μ , POINCARÉ écrit le système (5.1) sous la forme :

$$(5.2) \quad \frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + \mu X_s^{(1)}(t, x_1, \dots, x_n) + \\ + \mu^2 X_s^{(2)}(t, x_1, \dots, x_n) + \dots$$

En négligeant les termes considérés petits : $\mu X_s^{(1)}, \mu^2 X_s^{(2)}, \dots$, on obtient le système générateur :

$$(5.2) \quad \frac{dx_s}{dt} = X_s^{(0)}(t, x_1, \dots, x_n) , \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

Soit :

$$(5.4) \quad x_s^0 = \varphi_s(t) \quad (s = 1, \dots, n)$$

une solution périodique quelconque du système générateur. Si on suit la méthode ci-dessus, il faut prendre cette solution en qualité de première approximation de la solution périodique $f_s(t)$. En ce cas, tacitement, on suppose qu'à la solution (5.4) correspond vraiment une solution périodique du système (5.2), qui diffère un peu de la solution (5.4) pour μ .

suffisamment petit. POINCARÉ a été probablement le premier qui, clairement, a démontré qu'un petit changement des parties droites des équations différentielles peut entraîner des changements qualitatifs brusques dans le comportement des solutions. Il a démontré qu'à une solution périodique du système générateur ne correspond pas toujours une solution périodique du système (5.2). A une solution génératrice périodique ne correspond peut-être aucune solution périodique de (5.2), ou telles solutions, peut-être, existent en grand nombre, ou bien une infinité. Autrement dit, il est possible que le problème de trouver les solutions périodiques du système (5.2) et le même problème pour le système (5.3) n'aient aucun rapport. Alors, le problème fondamental qui se pose est de clarifier les conditions pour lesquelles, à une solution périodique donnée du système (5.3), correspond une seule solution périodique du système (5.2).

Il s'agit ici de telles solutions périodiques du système (5.2), qui diffèrent peu de la solution périodique du système (5.3), ou plus exactement, il s'agit de telles solutions périodiques du système (5.2) qui, pour $\mu = 0$, tendent vers (5.4). Dans cette direction, ont travaillé MANDEL'STAM et PAPALEXI, ANDRONOV et VITT [3], MALKIN [65-71], FRIEDRICH et STOKER [32-34, 88-90], MINORSKI [110], etc...

VI - JUSTIFICATION MATHÉMATIQUE DE LA MÉTHODE DU PETIT PARAMÈTRE [34, 67] - L'EXISTENCE DES SÉRIES SELON LES PUISSANCES DU PETIT PARAMÈTRE.

Considérons l'équation [88] :

$$(6.1) \quad \ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}, \theta), \quad \theta = \omega t$$

où f est une fonction périodique par rapport à t , ayant la période $\frac{2\pi}{\omega}$, analytique par rapport à $x, \dot{x}, \theta$; μ est un petit paramètre. On démontre que l'équation (6.1) a une solution ayant la période $\frac{2\pi}{\omega}$, solution qui est mise sous la forme d'une série suivant les puissances de μ . On sait [105, 106] que toutes les solutions $x(t, \mu)$ de l'équation (6.1) dépendent analytiquement de t et μ . Pour établir l'existence des solutions périodiques $x(t)$ on peut supposer $\dot{x}(0) = 0$, en modifiant par conséquent la phase de la fonction f . Nous avons donc :

$$(6.2) \quad \ddot{x} + x + \mu f(x, \dot{x}, \theta + \delta) = 0$$

où δ est l'angle de phase correspondant. On sait [106] que la solution unique cherchée $x(t, A, \delta, \mu)$ de l'équation (6.2), qui satisfait aux conditions initiales :

$$(6.3) \quad x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

où A est une quantité à notre disposition, existe dans le domaine

$$|t| \leq T_1, \quad |x - A| \leq A_1, \quad |\dot{x}| \leq A, \quad A_1 = 3 |A|$$

et dépend analytiquement de t , A , δ et μ . Pour $\mu = 0$, la solution génératrice

$$(6.4) \quad x(t) = A \cos t$$

a la période réelle de 2π .

Le problème consiste à établir l'existence des solutions périodiques dans le voisinage de $\mu = 0$, en supposant que $A = A(\mu)$, $\delta = \delta(\mu)$ et de choisir les solutions périodiques qui se trouvent parmi les solutions $x[t, A(\mu), \delta(\mu), \mu]$

La période $T = T(\mu) = \frac{2\pi}{\omega}$ sera une fonction de μ et elle devra tendre vers 2π , quand $\mu \rightarrow 0$. En conséquence, il faut démontrer que T_1 peut être choisi plus grand que 2π . On démontre que $x(t)$ existe pour $t \leq 3\pi$ [34, 88], en remplaçant l'équation différentielle (6.2) et sa dérivée avec les conditions initiales (6.3) par l'équation intégrale :

$$(6.5) \quad \begin{cases} x(t) = A \cos t + \mu \int_0^t f[x(\tau), x(\tau), \omega\tau + \delta] \sin(t - \tau) d\tau \\ \text{et} \end{cases}$$

$$(6.6) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -A \sin t + \mu \int_0^t f[x(\tau), x(\tau), \omega\tau + \delta] \cos(t - \tau) d\tau \end{cases}$$

Ensuite, on détermine les fonctions analytiques $A(\mu)$, $\delta(\mu)$, $T(\mu)$ pour que la solution $x[t, A(\mu), \delta(\mu), \mu]$ soit périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, c'est-à-dire qu'on détermine les fonctions ci-dessus par les conditions de périodicité :

$$(6.7) \quad \begin{cases} x(T, A, \delta, \mu) = x(0, A, \delta, \mu) \\ \dot{x}(T, A, \delta, \mu) = \dot{x}(0, A, \delta, \mu) \end{cases}$$

Ces deux relations de périodicité, pour la détermination de trois fonctions, permettant soit de donner A et déterminer ensuite $T(\mu)$ et $\delta(\mu)$, soit de donner δ et déterminer $A(\mu)$ et $T(\mu)$. Ainsi, on a ramené la démonstration d'existence des solutions périodiques de l'équation (6.2) à la solution des équations de la périodicité (6.7) dans le voisinage de $\mu = 0$. Étant donné que (6.7) sont satisfaites identique-

ment pour A et $T = 2\pi$ (c'est-à-dire pour $\mu = 0$) et qu'en conséquence on ne peut pas utiliser le théorème des fonctions implicites pour résoudre les équations (6.7) dans le voisinage de $\mu = 0$, on introduit au lieu de T une nouvelle variable η :

$$(6.8) \quad T = 2\pi + \mu \eta (\mu)$$

Alors, la fréquence sera donnée par la formule :

$$(6.8) \quad \omega = \frac{1}{1 + \frac{\mu \eta}{2\pi}} \simeq 1 - \frac{\mu \eta}{2\pi} \quad \text{pour } \mu \text{ petit.}$$

Ainsi, l'égalité $T = 2\pi$ pour $\mu = 0$ est automatiquement satisfaite.

Pour transformer les conditions de la périodicité dans des conditions qui ne sont pas identiquement satisfaites, on introduit les quantités :

$$(6.9) \quad P = \frac{1}{\mu} [A - x(T, A, \delta, \mu)] = P(A, \delta, \mu, \eta)$$

$$(6.10) \quad Q = -\frac{1}{\mu} [x(T, A, \delta, \mu)] = Q(A, \delta, \eta, \mu)$$

Les conditions de la périodicité sont maintenant :

$$(6.11) \quad P = 0, \quad Q = 0$$

En vertu de (6.5) et (6.6), les équations (6.11) deviennent :

$$(6.12) \quad P = A\mu^{-1} [(1 - \cos \mu \eta)] + \int_0^{2\pi + \mu \eta} f[x(\tau), \dot{x}(\tau), \omega \tau + \delta] \sin(\tau - \mu \eta) d\tau = 0$$

$$(6.13) \quad Q = A\mu^{-1} \sin \mu \eta - \int_0^{2\pi + \mu \eta} f[x(\tau), \dot{x}(\tau), \omega \tau + \delta] \cos(\tau - \mu \eta) d\tau = 0,$$

où ω s'exprime par η (6.8). Etant donné que $\mu^{-1} (1 - \cos \mu)$ et $\mu^{-1} \sin \mu$ peuvent être mis sous la forme de séries suivant les puissances de μ (dans le point $\mu = 0$) qui représentent des fonctions analytiques (et régulières) de μ , la même chose est valable pour P et Q (comme fonctions de μ, η et δ).

Si l'on pouvait montrer que les équations (6.12) et

(6.13) possèdent, pour $\mu = 0$, une solution pour n'importe quelle paire de valeurs (A, η) , (A, δ) , (δ, η) et pour une valeur respectivement arbitraire pour la troisième quantité, de telle sorte que le jacobien de P et Q pour les paires de valeurs correspondantes ne soit pas nul pour $\mu = 0$, alors, du théorème des fonctions implicites il résulterait que les équations (6.12), (6.13) pourraient être résolues dans le voisinage de $\mu = 0$ par rapport soit à $[A(\mu), \eta(\mu)]$, soit à $[A(\mu), \delta(\mu)]$, soit à $[\delta(\mu), \eta(\mu)]$.

Dans ces conditions, l'existence des solutions périodiques serait établie, les solutions auraient la période $T = 2\pi + \mu\eta$, elles seraient des fonctions (régulières) analytiques par rapport à dans le voisinage de $\mu = 0$ et se développeraient donc en séries suivant les puissances de μ .

Soit P_0 et Q_0 les valeurs de P et Q pour $\mu = 0$. Puisque $x = A \cos t$, $\dot{x} = -A \sin t$ quand $\mu = 0$, dans le cas des vibrations forcées, les conditions de la périodicité (6.12) et (6.13) deviennent :

$$(6.14) \quad P_0(A, \delta) = \int_0^{2\pi} f(A \cos \tau, -A \sin \tau, \tau + \delta) \sin \tau d\tau = 0$$

$$(6.15) \quad Q_0(A, \delta, \eta) = A\eta - \int_0^{2\pi} f(A \cos \tau, -A \sin \tau, \tau + \delta) \cos \tau d\tau = 0$$

Remarque : Pour le cas de l'équation de Duffing à amortissement linéaire :

$$(6.16) \quad f = \mu g(x) - 2\mu H \dot{x} + \mu \lambda \cos(\theta + \delta), \quad H \neq 0,$$

nous avons :

$$(6.17) \quad P_0(A, \delta) = 2\pi\mu H A - \pi\mu\lambda \sin \delta = 0$$

$$(6.18) \quad Q_0(A, \delta, \eta) = A\eta - \mu \int_0^{2\pi} g(A \cos \tau) \cos \tau d\tau - \pi\mu\lambda \cos \delta = 0$$

Si $\delta = \delta_0 + 0$ est donné, alors

$$(6.19) \quad A_0 = \frac{\lambda}{2H} \sin \delta_0 \quad \text{et} \quad A_0 = 0 \quad \text{remplacé en (6.18) donne :}$$

$$(6.20) \quad \eta_0 = A_0^{-1} \mu \left[\int_0^{2\pi} g(A \cos \tau) \cos \tau d\tau + \pi\lambda \cos \delta_0 \right]$$

Les deux dernières équations donnent des courbes de résonance en première approximation par rapport à μ . Si $H = 0$, alors de (6.17) on voit que $\delta = 0$ ou π et l'égalité (6.18) permet d'obtenir η_0 pour une valeur arbitraire de $A \neq 0$.

I.G. MALKIN [67], (MINORSKI [110] pour les systèmes autonomes) arrive aux conditions semblables pour l'existence des solutions périodiques dans le cas de résonance, pour l'équation

$$(6.21) \quad \ddot{x} + k^2 x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

où $k^2 = n^2 - \mu a$ (à résonance), n est un nombre entier,

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j t + b_j \sin j t)$, $F(t, x, \dot{x}, \mu)$ - une fonction analytique par rapport aux $x, \dot{x}, \mu$ (pour μ petit), périodique par rapport à t de période 2π , qui se développe en série de Fourier (en cas de résonance on ajoute à F les termes $\mu a x$ et $\mu (a_n \cos n t + b_n \sin n t)$).

Pour trouver les solutions périodiques de l'équation (6.21), qui ont la période 2π , suivons la méthode de Poincaré [75]. On remarque d'abord que l'équation génératrice ($\mu = 0$) :

$$(6.22) \quad \ddot{x} + n^2 x + f(t) = 0$$

a une famille des solutions périodiques de période 2π

$$(6.23) \quad x_0 = -\frac{a_0}{2} \sum_{j \neq n} \frac{a_j \cos j t + b_j \sin j t}{n^2 - j^2} + M_0 \cos n t +$$

$$N_0 \sin n t = \varphi(t) + M_0 \cos n t + N_0 \sin n t$$

qui dépendent de deux constantes arbitraires M_0 et N_0 . C'est pourquoi le cas de résonance diffère brusquement de celui de non résonance pour lequel l'équation génératrice admet une seule solution périodique isolée.

En prenant, comme solution génératrice, une des solutions de la famille (6.23) (pour M_0, N_0 fixés), on établira les conditions pour lesquelles l'équation (6.21) admettra une solution périodique qui se transforme en (6.23) (solution génératrice) pour $\mu = 0$. Soit $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ la solution périodique cherchée satisfaisant aux conditions initiales :

$$(6.24) \quad \begin{aligned} x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= x_0(0) + \beta_1 \\ \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) &= \dot{x}_0(0) + \beta_2 \end{aligned}$$

Cette solution sera analytique par rapport aux β_1 , β_2 , μ [105] (et sera égale à x_0 quand $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$). En conséquence, on aura :

$$(6.25) \quad x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = x_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \mu(D\beta_1 + E\beta_2 + F\mu) + \dots$$

où $A, B, C, \dots$ sont des fonctions de t pour le moment inconnues. Pour que la solution (6.25) soit périodique, il faut et il suffit que les quantités β_1 et β_2 satisfassent aux conditions :

$$(6.26) \quad \begin{cases} \Psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0 \\ \Psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = \dot{x}(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a ramené à nouveau le problème d'existence des solutions périodiques pour le système (6.21) (où $k^2 = n^2$) au problème de la solution des équations (6.26) par rapport à β_1 et β_2 comme fonctions de μ à condition que $\beta_1 = \beta_2 = 0$ pour $\mu = 0$ (puisque (6.25) doit être égal à (6.23) lorsque $\mu = 0$).

Pour déterminer les fonctions inconnues A, B, C, D, E (en même temps pour préciser les conditions (6.26)), on remplace (6.25) en (6.21) et on égale les coefficients des mêmes puissances de $\beta_1, \beta_2, \mu, \mu\beta_1, \mu\beta_2, \dots$, n'oubliant que (de 6.24) :

$$(6.27) \quad \begin{aligned} A(0) &= 1 & B(0) &= C(0) = D(0) = E(0) = \dots = 0 \\ \dot{A}(0) &= 0 & \dot{B}(0) &= 1, \dot{C}(0) = \dot{D}(0) = \dot{E}(0) = \dots = 0 \end{aligned}$$

Après les calculs, on trouve :

$$(6.28) \quad A = \cos n t \quad ; \quad B = \frac{1}{n} \sin n t$$

$$(6.29) \quad \begin{cases} C = \frac{1}{n} \int_0^t F[\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0] \sin n(t-\tau) d\tau \\ \dot{C} = \int_0^t F[\tau, x_0(\tau), \dot{x}(\tau), 0] \cos n(t-\tau) d\tau \end{cases}$$

$$(6.30) \quad \begin{cases} D = \frac{1}{n} \int_0^t \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=\tau} \cos n\tau - n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=\tau} \sin n\tau \right\} \sin n(t-\tau) d\tau \\ \dot{D} = \int_0^t \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=\tau} \cos n\tau - n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)_{t=\tau} \sin n\tau \right\} \cos n(t-\tau) d\tau, \end{cases}$$

où dans les formules (6.30) les parenthèses indiquent que les dérivées se calculent pour la solution génératrice.

Parce que $[A] = [\dot{A}] = [B] = [\dot{B}] = 0$ (en désignant par $[f(t)] = f(2\pi) - f(0)$), les équations (6.26) en vertu de (6.25) prennent la forme :

$$(6.31) \quad \begin{cases} \Psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = \mu \{ [C] + [D]\beta_1 + [E]\beta_2 + [F]\mu + \dots \} = 0 \\ \Psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = \mu \{ [\dot{C}] + [\dot{D}]\beta_1 + [\dot{E}]\beta_2 + [\dot{F}]\mu + \dots \} = 0 \end{cases}$$

Ces équations, à la différence du cas de non résonance, n'ont pas de termes linéaires en β_1 et β_2 . C'est pourquoi le

jacobien : $\left\{ \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \right\}_{\beta_1=\beta_2=\mu=0}$ s'annule pour

$\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$ (donc on ne peut pas appliquer le théorème général sur les fonctions implicites) et le problème de la solution des équations (6.31) nécessite une investigation spéciale. En simplifiant (6.31) par μ , à cause de la présence de $[C]$ et $[\dot{C}]$ les équations obtenues ne seront pas satisfaites en faisant $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$ (condition nécessaire). Par conséquent, pour avoir $\beta_1(0) = 0$, il est nécessaire que les termes $[C] = [\dot{C}] = 0$, ou bien que :

$$(6.32) \quad \begin{cases} P(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi} F[\tau, M_0 \cos n\tau + N_0 \sin n\tau + \varphi(t), \\ \quad -M_0 n \sin n\tau + N_0 n \cos n\tau + \dot{\varphi}(\tau), 0] \sin n\tau d\tau = 0 \\ Q(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi} F[\tau, M_0 \cos n\tau + N_0 \sin n\tau + \varphi(t), \\ \quad -M_0 n \sin n\tau + N_0 n \cos n\tau + \dot{\varphi}(\tau), 0] \cos n\tau d\tau = 0 \end{cases}$$

(Voir 6.12 et 6.13).

Les conditions (6.32), en général, ne sont pas satis-

faites pour n'importe quelle valeur de M_0 et N_0 ; ce sont des équations qui servent à la définition de ces quantités. Par conséquent, à n'importe quelle solution périodique génératrice ne correspondent pas toujours des solutions périodiques de l'équation (6.21).

En choisissant M_0 et N_0 conformes à (6.32), alors les équations (6.31) prennent la forme :

$$(6.33) \quad \begin{cases} \Psi'_1 = [D] \beta_1 + [E] \beta_2 + [F] \mu + \dots = 0 \\ \Psi'_2 = [\dot{D}] \beta_1 + [\dot{E}] \beta_2 + [\dot{F}] \mu + \dots = 0 \end{cases}$$

dont le jacobien par rapport à β_1 et β_2 pour $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$ a la forme :

$$(6.34) \quad \Delta = \left\{ \frac{\partial(\Psi'_1, \Psi'_2)}{(\beta_1, \beta_2)} \right\}_{\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0} = \begin{vmatrix} [D] & [E] \\ [\dot{D}] & [\dot{E}] \end{vmatrix} = - \frac{1}{n^2} \frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)}$$

Si $\Delta \neq 0$, alors, d'après le théorème général sur les fonctions implicites, les équations (6.33), et par conséquent aussi (6.31) ont une solution $\beta_i = \beta_i(\mu)$, $i = 1, 2$, et une seule, analytique par rapport à μ , pour laquelle $\beta_i(0) = 0$. En remplaçant cette relation en $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ on obtient une solution périodique de l'équation (6.21) (où $k^2 = n^2$) et cette solution sera analytique par rapport à μ . En conclusion, pour faire correspondre une solution périodique de l'équation (6.21) à la solution génératrice (6.23), il est nécessaire que M_0 et N_0 satisfassent aux équations (6.32). A chaque solution simple (c'est-à-dire pour laquelle $\Delta \neq 0$) correspond en effet une solution périodique de l'équation (6.21) et cette solution sera analytique par rapport à μ , pourvu que μ soit suffisamment petit.

Remarque : La méthode de MALKIN diffère de celle de FRIEDRICH [34] parce que la première est plus concrète (et convient seulement pour les systèmes non autonomes). Ici, la période T (c'est-à-dire ω ou η) est donnée et il reste à déterminer seulement l'amplitude et l'angle de phase (c'est-à-dire M_0 et N_0 ou, en notation de STOKER A et δ), la pulsation ω étant considérée comme une fonction analytique de μ seulement dans le cas des systèmes autonomes [67], [110].

Comme application de la méthode du petit paramètre, on étudiera à nouveau l'équation de Duffing à l'aide de trois pro-

cédés : celui de STOKER (la forme proposée par LINDSTEDT), de MALKIN et de BOGOLJUBOV (la méthode asymptotique) et nous allons comparer les équations obtenues pour les courbes de résonance.

VII - EQUATION DE DUFFING ETUDIEE A L'AIDE DE LA METHODE DU PETIT PARAMETRE.

A) Méthode de LINDSTEDT [56].- Considérons, pour tous les procédés, l'équation de Duffing de la forme

$$(7.1) \quad \ddot{x} + k^2 x = \mu (\gamma x^3 + \lambda \cos \omega t)$$

En introduisant la variable

$$(7.2) \quad \theta = \omega t \rightarrow t = \frac{\theta}{\omega}, \quad dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

dans le cas de LINDSTEDT, l'équation (7.1) devient :

$$(7.3) \quad -\omega^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + k^2 x = \mu (\gamma x^3 + \lambda \cos \theta)$$

Supposons que la solution périodique cherchée satisfasse aux conditions :

$$(7.4) \quad a) \quad x(\theta + 2\pi) = x(\theta), \quad b) \quad x(0) = A, \quad c) \quad x'(0) = 0$$

On cherchera la solution de l'équation (7.3) sous la forme de série :

$$(7.5) \quad x(\theta) = x_0(\theta) + \mu x_1(\theta) + \mu^2 x_2(\theta) + \dots$$

$$(7.6) \quad \omega = \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega_2 + \dots$$

En ce cas, les conditions (7.4) deviennent :

$$(7.7) \quad a) \quad x_1(\theta + 2\pi) = x_1(\theta); \quad b) \quad x_0(0) = A, \quad x_1(0) = 0; \\ c) \quad x'_0(0) = 0, \quad x'_1(0) = 0.$$

Après la substitution de (7.5) et (7.6) en (7.3), on obtient :

$$(7.8) \quad [\omega_0^2 + 2\mu\omega_0\omega_1 + \mu^2(\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2) + \dots] (x''_0 + \mu x''_1 + \dots) \\ + k^2(x_0 + \mu x_1 + \dots) = \mu\gamma(x_0^3 + 3x_0^2 x_1 \mu + \dots) + \lambda\mu \cos \theta$$

En égalant les termes des mêmes puissances de μ , on obtient :

$$(7.9) \quad \omega_0^2 x''_0 + k^2 x_0 = 0, \quad \text{et par suite}$$

$$(7.10) \quad x_0 = A \cos \frac{k}{\omega_0} \theta + B_0 \sin \frac{k}{\omega_0} \theta$$

où A_0 , B_0 , ω_0 , conformément aux conditions (7.7) sont :

$$(7.11) \quad a) \omega_0 = k, \quad b) A_0 = A, \quad c) B_0 = 0 \quad \text{et par conséquent :}$$

$$(7.12) \quad x_0 = A \cos \theta, \quad \omega_0 = k$$

Plus loin, l'équation pour x_1 sera :

$$(7.13) \quad \omega_0^2 x_1'' + k^2 x_1 = -2\omega_0 \omega_1 x_0'' + \gamma x_0^3 + \lambda \cos \theta = \\ (2\omega_0 \omega_1 A + \frac{3}{4} \gamma A^3 + \lambda) \cos \theta + \frac{\gamma}{4} A^3 \cos 3\theta$$

Conformément aux conditions de la périodicité de x_1 , on aura :

$$(7.14) \quad \omega_1 + \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 + \frac{\lambda}{A} \right) + \dots = 0$$

De (7.6) : $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_0 \omega_1 \mu + \dots$ conduit à l'équation des courbes de résonance :

$$(7.15) \quad \boxed{\omega^2 = k^2 - \mu \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 + \frac{\lambda}{A} \right) + \dots} \quad (V. (2.7)).$$

En tenant compte de (7.14) et (7.11), la solution de l'équation (7.13) sera :

$$(7.16) \quad x_1 = A_1 \cos \frac{k}{\omega_0} \theta + B_1 \sin \frac{k}{\omega_0} \theta + \frac{\gamma A^3}{4(k^2 - 9\omega_0^2)} \cos 3\theta = \\ A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta - \frac{\gamma A^3}{32 k^2} \cos 3\theta$$

$$\text{où (Voir (7.7) b) et c)) : } A_1 = \frac{\gamma A^3}{32 k^2}, \quad B_1 = 0$$

Pour le moment, la solution cherchée sera :

$$x = A \cos \theta + \mu \frac{\gamma A^3}{32 k^2} (\cos \theta - \cos 3\theta) + \dots$$

$$(7.17) \quad \omega = k - \mu \frac{1}{2k} \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 + \frac{\lambda}{A} \right) + \dots \quad (V. (2.4)).$$

B) Méthode de MALKIN [67] - On suppose qu'à la résonance k diffère un peu d'un nombre entier n , qui est en même temps la pulsation de la force excitatrice ($\omega = n$). Alors :

$$(7.18) \quad k^2 = n^2 - \mu \quad a \quad a > 0, \text{ borné}$$

et l'équation (7.1) devient :

$$(7.19) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = \mu (ax + \gamma x^2 + \lambda \cos nt)$$

La solution de l'équation génératrice est :

$$(7.20) \quad x_0 = M_0 \cos nt + N_0 \sin nt$$

On cherche la solution périodique de l'équation (7.19) sous la forme :

$$(7.21) \quad x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \quad (\text{à coefficients } x_i \text{ périodiques}).$$

En substituant (7.21) en (7.19) et en égalant les mêmes coefficients des puissances de μ , on trouve (par exemple pour x_1) :

$$(7.22) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + n^2 x_1 = \lambda \cos nt + a(M_0 \cos nt + N_0 \sin nt) + \gamma (M_0 \cos nt + N_0 \sin nt)^3$$

Pour que x_1 soit une fonction périodique, il est nécessaire que :

$$(7.23) \quad \begin{cases} P(M_0, N_0) = a N_0 + \frac{3}{4} \gamma N_0 (M_0^2 + N_0^2) = 0 \\ Q(M_0, N_0) = \lambda + a M_0 + \frac{3}{4} \gamma M_0 (M_0^2 + N_0^2) = 0 \end{cases}$$

Ces équations sont satisfaites si $N_0 = 0$ et $M_0 = A$, où A est une racine de l'équation :

$$(7.24) \quad \lambda + a A + \frac{3}{4} \gamma A^3 = 0$$

En supposant que $M_0 = A$ (défini par (7.24)) et $N_0 = 0$, on aura :

$$(7.25) \quad x_1 = \frac{\gamma A^3}{32 n^2} \cos 3nt + M_1 \cos nt$$

où M_1 est une nouvelle constante arbitraire qui sera déterminée par la condition de périodicité de x_2 donnée par :

$$(7.26) \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + n^2 x_2 = a \left(\frac{\gamma A^3}{32 n^2} \cos 3 nt + M_1 \cos nt \right) + 3 \gamma A^2 \cos^2 nt$$

$$\left(\frac{\gamma A^3}{32 n^2} \cos 3 nt + M_1 \cos nt \right)$$

La condition de périodicité de x_2 donne :

$$(7.27) \quad \left(a + \frac{9}{4} \gamma A^2 \right) M_1 + \frac{1}{128 n^2} \gamma^2 A^5 = 0$$

qui représente une équation linéaire (ainsi que pour toutes les constantes M_i ($i \geq 1$)) [67]. De (7.27), on aura :

$$(7.28) \quad M_1 = - \frac{3}{128 n^2} \frac{\gamma^2 A^5}{\left(a + \frac{9}{4} \gamma A^2 \right)}$$

Si nous nous bornons à cette approximation, la solution cherchée sera :

$$(7.29) \quad x = A \cos nt + \mu \frac{\gamma A^3}{32 n^2} (\cos 3 nt - \frac{3}{4} \frac{\gamma A^2}{a + \frac{9}{4} \gamma A^2} \cos nt) + \dots$$

En remplaçant a par son expression (7.18), la relation (7.24), qui donne A , devient :

$$(7.30) \quad n^2 = k^2 - \mu \left(\frac{3}{4} \gamma A^2 + \frac{\lambda}{A} \right) \quad \left(\text{Comparer à (7.15) pour } n = \omega \right),$$

ou :

$$(7.30') \quad \lambda' + (n^2 - k^2) A + \frac{3}{4} \gamma' A^3 = 0, \quad \text{où } \lambda' = \mu \lambda, \quad \gamma' = \mu \gamma$$

Les racines de cette équation peuvent être obtenues graphiquement comme les abscisses des points d'intersection de la droite :

$$(7.31) \quad y = (k^2 - n^2) A - \lambda'$$

et de la parabole cubique

$$(7.32) \quad y = \frac{3}{4} \gamma' A^3$$

De la figure 7 ($\gamma > 0$) on voit que si la différence $k^2 - n^2$ est négative, ou positive, et si elle ne dépasse pas une valeur quelconque α , pour laquelle la droite (7.31) est tangente à la parabole (7.32), alors l'équation (7.30') aura une seule racine réelle négative. Mais si $k^2 - n^2 > \alpha$, alors

l'équation (7.30') aura trois racines réelles, dont une négative et deux positives. On obtiendra le même résultat si l'on construit la courbe de résonance $|A| = |A(k^2)|$, à l'aide de la parabole $k^2 = n^2 + \frac{3}{4} \gamma' A^2$ et de la famille des courbes $k^2 = \frac{\lambda}{|A|}$ (Fig. 8 et 9).

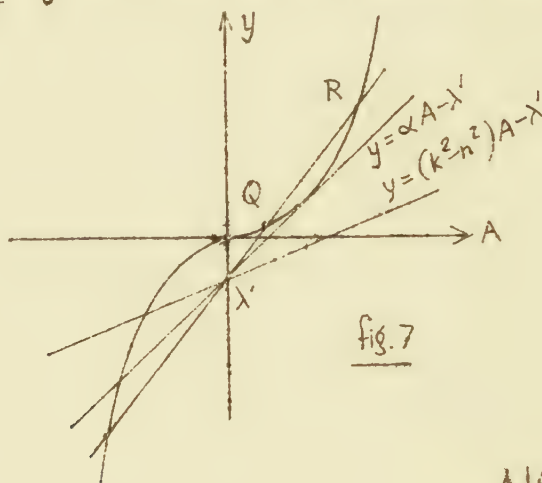


fig. 7

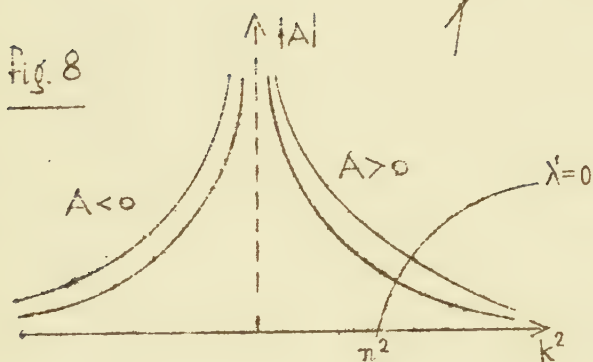


fig. 8

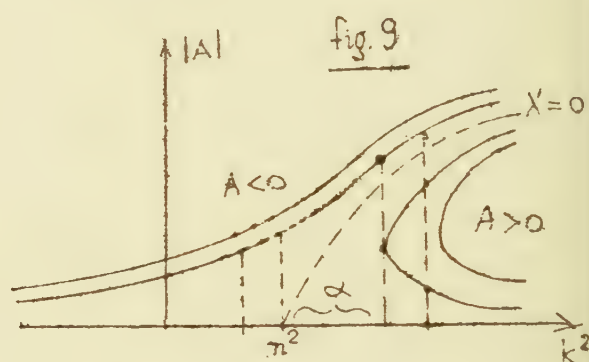


fig. 9

Remarque - Pour le cas de non-résonance (k très éloigné d'un nombre entier), l'équation de Duffing (quasi-linéaire) :

$$(7.33) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = \lambda \cos nt + \mu \gamma x^3 \quad \gamma > 0$$

possède une seule solution périodique [67] (de la même période que la force excitatrice), qui peut être cherchée sous la forme de série :

$$(7.34) \quad x = x_0 + \mu x_1 + \dots$$

à coefficients périodiques où $x_0 = \frac{\lambda}{k^2 - n^2} \cos nt$ est la seule solution génératrice isolée, de période $T = \frac{2\pi}{n}$ de l'équation (7.33) quand $\mu = 0$. Si l'on se borne à la première approximation, on trouve que :

$$(7.35) \quad x = \frac{\lambda}{k^2 - n^2} \cos nt + \mu \frac{\gamma \lambda^3}{4(k^2 - n^2)} \left[\frac{3}{k^2 - n^2} \cos nt + \frac{1}{k^2 - 9n^2} \cos 3nt + \dots \right]$$

C) Méthode de KRYLOV-BOGOLJUBOV et VAN DER POL [11,74]-

On remarque que pour μ assez petit, une solution périodique de l'équation (1.3) maintiendrait la même forme (1.6) a) ou b), à condition que les quantités A_0 , B_0 ou A , φ ne soient pas des constantes, mais des fonctions du temps qui "varient lentement" et qui doivent être déterminées. La méthode de KRYLOV-BOGOLJUBOV part de (1.6) b), et la méthode de VAN der POL part de (1.6) a). Dans la suite, on fera une application de la méthode de KRYLOV-BOGOLJUBOV à l'équation de Duffing (7.1). On cherchera la solution de (7.1) sous la forme de la série :

$$(7.36) \quad x = A \cos\left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi\right) + \mu u_1(A, \omega t, \varphi) + \mu^2 u_2(\omega t + \varphi) + \dots$$

u_i étant des fonctions périodiques de période $T = 2\pi$ par rapport aux deux variables angulaires; p , q , sont des nombres entiers sans diviseurs communs (d'habitude pas très grands) qui servent à déterminer différents cas de résonance [11, p.200]

$\Psi = \frac{p}{q} \omega t + \varphi$; A et φ doivent être déterminés par les équations :

$$(7.37) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \mu A_1(A, \varphi) + \mu^2 A_2(A, \varphi) + \dots \\ \frac{d\varphi}{dt} = k - \frac{p}{q} \omega + \mu B_1(A, \varphi) + \mu^2 B_2(A, \varphi) + \dots \end{cases}$$

d'où nous avons :

$$(7.38) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 A}{dt^2} &= \mu \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) \frac{dA_1}{d\varphi} + \mu^2 \left\{ \frac{\partial A_1}{\partial A} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} B_1 + \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right\} + \dots \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \mu \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + \mu^2 \left\{ \frac{\partial B_1}{\partial A} A_1 + \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} B_1 + \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} \right\} + \dots \\ \left(\frac{dA}{dt}\right)^2 &= \mu^2 A_1^2 + \dots \\ \frac{dA}{dt} \frac{d\varphi}{dt} &= \mu \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) A_1 + \mu^2 \left\{ A_1 B_1 + \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) A_2 \right\} + \dots \\ \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= \left(k - \frac{p}{q} \omega\right)^2 + 2\mu \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) B_1 + \mu^2 \left\{ B_1^2 + 2 B_2 \left(k - \frac{p}{q} \omega\right) \right\} + \dots \end{aligned}$$

Pour déterminer les fonctions u_i , A_i , B_i ($i = 1, 2, \dots$) on remplace (7.36) en (7.1) (en considérant aussi (7.37) et (7.38)). En ordonnant par rapport aux puissances de μ , on obtiendra :

(7.39)

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x &\equiv \mu \left\{ \left[\left(k - \frac{p}{q} \omega \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - 2k A B_1 \right] \cos \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) - \left[\left(k - \frac{p}{q} \omega \right) A \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + 2k A_1 \right] \sin \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi \partial t} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right)^2 + k^2 u_1 \right\} \\
 &+ \mu^2 \left\{ \left[\left(k - \frac{p}{q} \omega \right) \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} - 2k A B_2 \right] \cos \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) - \left[\left(k - \frac{p}{q} \omega \right) A \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + 2k A_2 \right] \sin \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi \partial t} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right)^2 + k^2 u_2 + \right. \\
 &+ \left[-\frac{\partial A_1}{\partial A} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} B_1 - B_1^2 A \right] \cos \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) - \left[A \frac{\partial B_1}{\partial A} A_1 + A \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} B_1 + 2 A_1 B_1 \right] \sin \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) + \frac{\partial u_1}{\partial A} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \\
 &\left. \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) B_1 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial A \partial t} A_1 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi \partial t} B_1 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial A \partial \varphi} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) A_1 \right\} + \dots = \\
 &= \mu \left[\gamma A^3 \cos^3 \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) + \lambda \cos \omega t \right] + \mu^2 \left[3 \gamma A^2 \cos^2 \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) \right] u_1 + \dots = \\
 &\equiv \mu \left\{ \frac{3}{4} \gamma A^3 \cos \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) + \lambda \cos \omega t + \frac{\gamma A^3}{4} \cos 3 \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) \right\} + \\
 &\quad + \mu^2 \left[\frac{3 \gamma A^2}{2} + \frac{3 \gamma A^2}{2} \cos 2 \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) \right] u_1 + \dots
 \end{aligned}$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de μ on obtient :

(7.40)

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi \partial t} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right)^2 + k^2 u_1 &= \gamma A^3 \cos^3 \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) \\
 + \lambda \cos \omega t + \left[\left(k - \frac{p}{q} \omega \right) A \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + 2k A_1 \right] \cos \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) &- \left[\left(k - \frac{p}{q} \omega \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - 2k A B_1 \right] \sin \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right)
 \end{aligned}$$

(7.41)

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi \partial t} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right)^2 + k^2 u_2 &= 3 \gamma A^2 \cos^2 \left(\frac{p}{q} \omega t + \varphi \right) u_1 - \\
 -\frac{\partial u_1}{\partial A} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \left(k - \frac{p}{q} \omega \right) B_1 &- 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial A \partial t} A_1 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi \partial t} B_1 - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial A \partial \varphi} (k - \frac{p}{q} \omega) A_1 + \left\{ (k - \frac{p}{q} \omega) A \frac{\partial B_2}{\partial \varphi} + 2k A_2 + \left(A \frac{\partial B_1}{\partial A} A_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (\Lambda \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} B_1 + 2 A_1 B_1) \right\} \sin(\frac{p}{q} \omega t + \varphi) - \left\{ (k - \frac{p}{q} \omega) \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} - 2k A B_2 + \right. \\
 & \left. + (\frac{\partial A_1}{\partial A} A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} B_1 - B_1^2 \Lambda) \right\} \cos(\frac{p}{q} \omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

Pour le cas de la résonance principale ($p = 1, q = 1$) si nous nous bornons seulement à la détermination des fonctions u_1, A_1, B_1 , l'équation (7.40) devient :

(7.42)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi \partial t} (k - \omega) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} (k - \omega)^2 + k^2 u_1 = (\frac{3}{4} \gamma A^3 + \lambda \cos \varphi) \cos(\omega t + \varphi) + \\
 & + \left[\lambda \sin \varphi + (k - \omega) A \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + 2k A_1 \right] \sin(\omega t + \varphi) - \left[(k - \omega) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - 2k A B_1 \right] \\
 & \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\gamma A^3}{4} \cos 3(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

Nous chercherons u_1 sous la forme :

(7.43)

$$\begin{aligned}
 k^2 \quad & \left| \begin{aligned} u_1 &= C_{11} \cos(\omega t + \varphi) + C_{12} \sin(\omega t + \varphi) + C_{31} \cos 3(\omega t + \varphi) + \\ & C_{32} \sin 3(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right. \\
 & \text{et de là} \\
 & \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\omega C_{11} \sin(\omega t + \varphi) + \omega C_{12} \cos(\omega t + \varphi) - 3\omega C_{31} \sin 3(\omega t + \varphi) \\
 & \quad \quad \quad 3\omega C_{32} \cos 3(\omega t + \varphi) \\
 1 \quad & \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\omega^2 \left\{ C_{11} \cos(\omega t + \varphi) + C_{12} \sin(\omega t + \varphi) + 9 \left[C_{31} \cos 3(\omega t + \varphi) \right. \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. \left. + C_{32} \sin 3(\omega t + \varphi) \right] \right\} \right. \\
 2(k^2 - \omega) \quad & \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \varphi} = -\omega \left\{ C_{11} \cos(\omega t + \varphi) + C_{12} \sin(\omega t + \varphi) + \right. \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. \left. + 9 \left[C_{31} \cos 3(\omega t + \varphi) + C_{32} \sin 3(\omega t + \varphi) \right] \right\} \right.
 \end{aligned}$$

$$(k^2 - \omega)^2 \left| \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} = - \left\{ C_{11} \cos(\omega t + \varphi) + C_{12} \sin(\omega t + \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + 9 [C_{31} \cos 3(\omega t + \varphi) + C_{32} \sin 3(\omega t + \varphi)] \right\} \right.$$

En substituant (7.43) en (7.42) on déterminera C_{ij} ($i = 1, 3$; $j = 1, 2$), A_1 et B_1 de telle façon que u_1 ne contienne pas de termes de résonance. La dernière condition sera satisfaite si A_1 et B_1 sont définies par les relations (les coefficients de $\cos(\omega t + \varphi)$ et $\sin(\omega t + \varphi)$) :

$$(7.44) \quad \begin{aligned} (k - \omega) A \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} + 2 k A_1 &= -\lambda \sin \varphi \\ (k - \omega) \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - 2 k A B_1 &= \frac{3}{4} \gamma A^3 + \lambda \cos \varphi \end{aligned}$$

(ceux-ci conduisent à $C_{11} = C_{12} = 0$).

En égalant les coefficients des mêmes harmoniques $\cos 3(\omega t + \varphi)$ et $\sin 3(\omega t + \varphi)$, on aura :

$$(7.45) \quad C_{31} = \frac{\gamma A^3}{4 [k^2 - 9\omega^2 - 18\omega(k - \omega) - (k - \omega)^2]} = \frac{\gamma A^3}{32\omega(\omega - 2k)}$$

$$C_{32} = 0$$

De (7.44), on trouve aisément que :

$$(7.46) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} &= \frac{2k A B_1}{k - \omega} + \frac{\frac{3}{4} \gamma A^3}{k - \omega} + \frac{\lambda}{k - \omega} \cos \varphi ; \\ \frac{\partial B_1}{\partial \varphi} &= - \frac{2k A_1}{A(k - \omega)} - \frac{\lambda}{A(k - \omega)} \sin \varphi , \text{ et par suite} \\ (k - \omega)^2 \frac{\partial^2 B_1}{\partial \varphi^2} + 4 k^2 B_1 &= - \frac{3}{2} k \gamma A^2 - \frac{\lambda}{A} (3k - \omega) \cos \varphi \\ (k - \omega)^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \varphi^2} + 4 k^2 A_1 &= - \lambda (3k - \omega) \sin \varphi . \end{aligned}$$

Une solution particulière périodique par rapport à φ est donnée par :

$$(7.47) \quad A_1 = - \frac{\lambda}{k + \omega} \sin \varphi \quad B_1 = - \frac{3\gamma A^2}{8k} - \frac{\lambda}{A(k + \omega)} \cos \varphi .$$

Par conséquent, on obtient la solution :

$$(7.48) \quad x = A \cos (\omega t + \varphi) + \mu \frac{\gamma A^3}{32 \omega (\omega - 2k)} \cos 3(\omega t + \varphi) + \dots$$

A et φ étant données par les équations :

$$(7.49) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = -\mu \frac{\lambda}{k+\omega} \sin \varphi + \dots \\ \frac{d\varphi}{dt} = k - \omega - \frac{\mu}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{\gamma A^2}{k} + \frac{2\lambda}{A(k+\omega)} \cos \varphi \right] + \dots \end{cases}$$

(S'il y avait aussi amortissement - c'est-à-dire lorsque l'équation (7.1) contient le terme $-\mu 2 H \dot{x}$ -, alors dans la première équation (7.41) apparaîtrait le terme $-\mu H A$).

Pour le régime stationnaire des vibrations synchrones, x représente, en première approximation, un sinusôide de fréquence égale à celle de la perturbation extérieure, ayant l'amplitude et la phase constantes et données jusqu'au deuxième ordre près par le système :

$$(7.50) \quad \begin{cases} -\mu \frac{\lambda}{k+\omega} \sin \varphi = 0 & \text{(en cas de l'amortissement : } -\mu(H A + \frac{\lambda}{k+\omega} \sin \varphi) = 0 \text{)} \\ k - \omega - \frac{\mu}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{\gamma A^2}{k} + \frac{2\lambda}{A(k+\omega)} \cos \varphi \right] = 0 \end{cases}$$

En prenant $\varphi = 0$, la deuxième équation de (7.50) devient :

$$(7.51) \quad \omega = k - \frac{\mu}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{\gamma A^2}{k} + \frac{2\lambda}{A(k+\omega)} \right] \quad (1) \quad \text{ou}$$

$$\omega^2 = k^2 - \mu \left[\frac{3}{4} \gamma A^2 + \frac{\lambda}{A} \frac{2k}{k+\omega} \right] \quad \text{ou}$$

$$(7.51') \quad \boxed{\omega^2 = k^2 - \mu \left[\frac{3}{4} \gamma A^2 + \frac{\lambda}{A} \right]} \quad \text{Voir (2.7)}$$

(1) BOGOLJUBOV écrit (7.51) sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left[(k - \mu \frac{3}{8} \frac{\gamma A^2}{k}) - \omega \right] - \mu \frac{\lambda}{A(k+\omega)} = 0 \quad \text{Il considère} \\ & k_e(A) = (k - \mu \frac{3}{8} \frac{\gamma A^2}{k}) \approx k \quad \text{et en multipliant par } k+\omega \text{ il} \\ & \text{trouve : } (k - \frac{3}{8} \frac{\gamma A^2}{k} A^2)^2 - \omega^2 - \frac{\mu \lambda}{A} = 0, \text{ d'où :} \\ & \omega^2 = k^2 - \mu \frac{3}{4} \gamma A^2 - \frac{\mu \lambda}{A} \end{aligned}$$

où l'on a remplacé $k \approx \omega$ dans le coefficient de $\frac{\lambda}{A}$.

Remarques :

1) Une méthode convergente pour les solutions périodiques (aussi bien que les théorèmes nécessaires d'existence) des systèmes quasi-linéaires, a été donnée par L. CESARI, J.K. HALE et R.A. GAMBILL (Voir [18]). Par cette méthode GAMBILL et HALE ont étudié l'exemple

$$(7.52) \quad \ddot{x} + c \dot{x} + \sigma^2 x = B \cos 2\omega t + \mu \alpha \cos 2\omega t x + \mu b x^3$$

qui contient comme cas particuliers : l'équation non linéaire de Mathieu à termes perturbateurs grands ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$), l'équation de Duffing ($\alpha = 0$, $c = 0$, $b \neq 0$) et l'équation de Duffing en présence de l'amortissement ($\alpha = 0$, $c > 0$, $b \neq 0$).

2) C.S. HSU [41] étudie l'équation de Duffing de la forme :

$$(7.53) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x + \gamma x^3 = F(t)$$

La solution de l'équation (7.53), sans la partie droite, s'exprime à l'aide des fonctions elliptiques Jacobi. Par exemple, pour $\gamma > 0$:

$$(7.54) \quad x = A \operatorname{cn}(pt, k)$$

où k est le module de la fonction elliptique, p la fréquence circulaire, A l'amplitude maxima des vibrations et

$$(7.55) \quad p^2 = (1 + \gamma A^2) ; k^2 = -\frac{\gamma A^2}{2(1 + \gamma A^2)}, \quad k > 0$$

Pour le cas $\gamma < 0$, la solution est donnée par :

$$x = A \operatorname{sn} \left[p_1 t + K(k_1), k_1 \right], \quad p_1^2 = 1 + \frac{\gamma A^2}{2}, \quad k_1^2 = -\frac{\gamma A^2}{2 + \gamma A^2}$$

où $K(k_1)$ est une intégrale elliptique complète de première espèce.

Si, dans le dernier cas $\gamma A^2 < -1$, la solution est mise sous la forme :

$$x = A \operatorname{sn} \left[p_2 t + K(k_2), k_2 \right], \quad p_2^2 = -\frac{\gamma A^2}{2}, \quad k_2^2 = -\frac{2 + \gamma A^2}{\gamma A^2}$$

Après avoir étudié quelques solutions, lorsque la force extérieure est formée de fonctions elliptiques favorites

(polynômes)⁽¹⁾ ($F(t) = Bx$, $F(t) = B_1x + B_3x^3$) [37], on étudie l'équation de Duffing quand $F(t) = \lambda \cos \frac{2\pi}{T} t = \lambda \cos \omega t$. On propose une nouvelle méthode approximative qui consiste à rechercher la solution sous la forme d'un polynôme de fonctions elliptiques Jacobi et au choix des paramètres qui assurent n'importe quelle exactitude par rapport à k^2 considéré comme petit (ou $|\gamma A^2|$ petit). On utilise les développements des fonctions Jacobi en série de Fourier⁽²⁾, et on évalue les coefficients de ces séries par rapport à k^2 .

HSU obtient la première approximation jusqu'à l'ordre k^2 lorsque la quantité $1 - p^2$ est de l'ordre de k^2 et lorsque cette dernière quantité est proche de l'unité. En cherchant la solution sous la forme (7.54), il trouve :

$$(7.58) \quad x = A \cos \omega t + \frac{1}{32} \gamma A^3 (-\cos \omega t + \cos 3\omega t),$$

$$\omega^2 = 1 + \frac{3}{4} \gamma A^2 - \frac{\lambda}{A}$$

Pour l'existence des solutions périodiques des équations quasi-linéaires, on peut consulter les travaux [20], [24] et pour d'autres détails concernant la méthode du petit paramètre : [12, 13, 14, 21, 27, 36, 42, 49, 64, 78].

VIII - VIBRATIONS SOUS-HARMONIQUES.

Dans les systèmes non linéaires, à la différence de ceux qui sont linéaires, sous l'action de la force excitatrice de période T , il peut apparaître des vibrations forcées intenses, tant dans le cas où les vibrations propres ont une période voisine de T , que dans le cas où leur période est voisine de nT (soit dans le cas où l'amortissement manque, soit dans le cas d'amortissement (petit)).

Dans ce dernier cas, la période des vibrations forcées sera égale à nT (vibrations sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{n}$ (ou

(1) Voir aussi OJALVO I.U., BLECKMAN G.L. "On Duffing's equation" Trans. ASME, 1961, E.28, n° 1, pp. 139-140.

(2) $\cos(pt, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi pt}{2K}$, $a_{2n+1} = \frac{2\pi q^{\frac{n+1}{2}}}{k K(1+q^{2n+1})}$

résonance d'ordre n). On dira quelques mots sur l'existence des vibrations sous-harmoniques, en considérant l'équation quasi-linéaire de la forme (Voir [67], [72]) :

$$(8.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) - f(t)$$

où la période des fonctions f et F est 2π , et F est une fonction analytique par rapport aux x et $\dot{x}$.

En supposant $k^2 = \frac{1}{n^2} - \mu \frac{a}{n^2}$ (k diffère un peu de $\frac{1}{n}$) et en passant $\mu \frac{a}{n^2} x$ dans la fonction μF , on écrira (8.1) sous la forme :

$$(8.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{n^2} x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

Nous voulons déterminer les conditions d'existence des solutions périodiques de période $2\pi n$, pour (8.2).

Puisque $\frac{1}{n^2}$ diffère d'un nombre entier, alors, en raison de la remarque faite à la page 30, l'équation (8.2) a une solution périodique de période 2π (donc, aussi bien de $2\pi n$) qui tend vers $\varphi(t) = -\frac{a_0}{2k^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nt + b_n \sin nt}{k^2 - n^2}$

(solution génératrice), lorsque μ tend vers zéro. Mais nous nous occuperons seulement de telles solutions périodiques de période $2\pi n$, qui ne se réduisent pas aux solutions de période 2π . Pour obtenir ces solutions, on remarque d'abord que l'équation génératrice possède une famille de solutions périodiques

$$(8.3) \quad x_0 = \varphi(t) + M_0 \cos \frac{t}{n} + N_0 \sin \frac{t}{n}$$

de période $2\pi n$, qui dépend de deux constantes arbitraires : M_0 et N_0 . Puisque la partie droite de l'équation (8.2) est périodique par rapport à t de période 2π et par conséquent aussi de période $2\pi n$, alors le problème d'existence ne diffère en rien de celui du par. 6 (voir aussi [67]) :

Les conditions (6.32) restent donc valables si l'on y remplace la période 2π par $2\pi n$. Pratiquement, il est plus facile de choisir l'unité de temps de telle façon que l'équation ait la période $\frac{2\pi}{n}$. Ainsi le problème se ramène à la recherche d'une solution périodique de période 2π .

On trouve par suite la résonance d'ordre n de l'é-

quation de Duffing :

$$(8.4) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = \mu (\gamma x^3 - 2 H \dot{x}) + \lambda \cos(t + \Psi) \equiv \mu (\gamma x^3 - 2 H \dot{x}) + F \cos t - G \sin t$$

A) sauf l'amortissement ($H = 0$, $\Psi = 0$) et

B) en présence de l'amortissement ($H \neq 0$, $\Psi \neq 0$) :

En supposant :

$$(8.5) \quad k^2 = \frac{1}{n^2} - \mu \frac{a}{n^2}, \quad n^2 \gamma = \gamma_1, \quad t = n\tau, \quad n^2 \lambda = \lambda_1,$$

$$Hn = H_1 \quad (n \text{ étant un nombre entier } \neq 1),$$

l'équation (8.4) devient :

$$(8.6) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \lambda_1 \cos(n\tau + \Psi) + \mu (ax + \gamma_1 x^3 - 2 H_1 \dot{x}_1)$$

Nous allons chercher les solutions périodiques de période 2π sous forme de la série :

$$(8.7) \quad x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \quad \text{où}$$

$$(8.8) \quad x_0 = \frac{\lambda_1}{1-n^2} \cos(n\tau + \Psi) + M_0 \cos \tau + N_0 \sin \tau$$

M_0 et N_0 étant des constantes arbitraires à déterminer. On les déterminera à partir des conditions de périodicité de x_1 . Pour la fonction x_1 on a l'équation différentielle :

$$(8.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = a x_0 + \gamma_1 x_0^3 - 2 H_1 \dot{x}_0 = & \left\{ M_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2} \right)^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] - \right. \\ & \left. - 2 H_1 N_0 \right\} \cos \tau + \left\{ N_0 \left[a + \frac{3}{2} \gamma_1 \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2} \right)^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + 2 H_1 M_0 \right\} \sin \tau + \\ & + \frac{1}{4} \gamma_1 M_0 (M_0^2 - 3 N_0^2) \cos 3\tau + \frac{1}{4} \gamma_1 N_0 (3 M_0^2 - N_0^2) \sin 3\tau - \\ & - \frac{3}{2} \frac{\gamma_1 - \lambda_1}{1-n^2} M_0 N_0 \sin [(n-2)\tau + \Psi] + \frac{3}{4} \frac{\gamma_1 \lambda_1}{1-n^2} (M_0^2 - N_0^2) \cos [(n-2)\tau \\ & + \Psi] + \left\{ \frac{a \lambda_1}{1-n^2} + \frac{3}{2} \gamma_1 \frac{\lambda_1}{1-n^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2} \right)^2 + M_0^2 + N_0^2 \right] \right\} \cos(n\tau + \Psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 H_1 \frac{n \lambda_1}{1-n^2} \sin(n\tau + \Psi) + \frac{3\delta_1}{2} \frac{\lambda_1}{1-n^2} M_0 N_0 \sin[(n+2)\tau + \Psi] + \\
 & + \frac{3}{4} \frac{\delta_1 \lambda_1}{1-n^2} (M_0^2 - N_0^2) \cos[(n+2)\tau + \Psi] + \frac{3}{4} \delta_1 \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2}\right)^2 M_0 \cos[(2n-1)\tau + \\
 & + 2\Psi] - \frac{3}{4} \delta_1 \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2}\right)^2 N_0 \sin[(2n-1)\tau + 2\Psi] + \frac{3}{4} \delta_1 \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2}\right)^2 M_0 \cos[\\
 & (2n+1)\tau + 2\Psi] + \frac{3}{4} \delta_1 \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2}\right)^2 N_0 \sin[(2n+1)\tau + 2\Psi] + \frac{\delta_1}{4} \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2}\right)^3 \\
 & \cos 3(n\tau + \Psi).
 \end{aligned}$$

Les conditions de périodicité de x_1 seront différentes suivant que $n \neq 0$ ou $n = 3$.

A) Dans le cas des vibrations sous-harmoniques en l'absence de l'amortissement ($H = 0$, $\Psi = 0$) pour $n \neq 3$, les conditions de périodicité de la fonction x_1 prennent la forme :

$$(8.10) \quad \begin{cases} P(M_0, N_0) = N_0 \left[a + \frac{3\delta_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2}\right)^2 + \frac{3}{4} \delta_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] = 0 \\ Q(M_0, N_0) = M_0 \left[a + \frac{3\delta_1}{2} \left(\frac{\lambda_1^2}{1-n^2}\right) + \frac{3}{4} \delta_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] = 0 \end{cases}$$

Ces équations ont évidemment la solution $M_0 = N_0 = 0$: On pouvait s'y attendre puisque l'équation (8.6) a une solution périodique de période $\frac{2\pi}{n}$ qui correspond à la solution génératrice $x_0 = \frac{\lambda}{1-n^2} \cos nt$ (c'est-à-dire pour $M_0 = N_0 = 0$ [88]) et cette solution peut être considérée comme périodique de période 2π . Par conséquent, il fallait la trouver parmi les solutions cherchées. Mais nous cherchons les solutions qui correspondent à M_0 et N_0 non nulles simultanément (c'est-à-dire pour lesquelles $\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0$).

Les équations (8.10) admettent aussi la solution :

$$(8.11) \quad M_0^2 + N_0^2 = - \frac{4}{3\delta_1} \left[a + \frac{3\delta_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{1-n^2}\right)^2 \right],$$

dont l'une des constantes M_0 et N_0 peut être choisie arbitrairement.

Mais à cause de celle-ci, le déterminant $\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)}$

s'annule et la méthode exposée dans le par. 6 ne s'applique pas.

b) Pour $n = 3$, les équations (8.10), compte tenu de (8.9) (et que $H = 0$) deviennent :

$$(8.12) \quad \begin{cases} P(M_0, N_0) = N_0 \left[a + \frac{3}{128} \gamma_1 \lambda_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + \\ \quad + \frac{3}{16} \gamma_1 \lambda_1 M_0 N_0 = 0 \\ Q(M_0, N_0) = M_0 \left[a + \frac{3}{128} \gamma_1 \lambda_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] - \\ \quad - \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 (M_0^2 - N_0^2) = 0 \end{cases}$$

Les équations (8.12), en dehors de $M_0 = N_0 = 0$, ont parmi d'autres solutions la solution :

$$(8.13) \quad N_0 = 0, \quad M_0 = \frac{3 \gamma_1 \lambda_1 \pm \sqrt{-3072a \gamma_1 - 63 \gamma_1^2 \lambda_1^2}}{48 \gamma_1}$$

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} \neq 0$$

Pour que cette solution soit réelle, il faut que :

$$3072 a \gamma_1 - 63 \gamma_1^2 \lambda_1^2 \geq 0$$

c'est-à-dire qu'il faut que a et γ_1 soient de signes contraires et que :

$$*) \quad |a| \geq \frac{21}{1024} \lambda_1^2 |\gamma_1|$$

ou, en tenant compte de (8.5) :

$$(8.14) \quad \left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \geq \frac{21.81}{1024} \lambda^2 |\mu \gamma|, \quad \left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \gamma > 0$$

J. STOKER [88], en résolvant le même problème par une méthode moins rigoureuse, cherche la solution sous la forme d'une série de Fourier :

$$(8.15) \quad x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\theta}{3} + b_m \sin \frac{m\theta}{3}, \quad (\theta = nt \text{ et } n^2 x'' + (k^2 x + \mu \gamma x^3) = \lambda \cos \theta)$$

ou plus précisément sous la forme :

$$(8.16) \quad x = A_{1/3} \cos \frac{\theta}{3} + A_1 \cos \theta + A_{5/3} \cos \frac{5\theta}{3} + \dots$$

dont les coefficients sont déterminés par la méthode d'approximations successives, et il trouve l'inégalité :

$$(8.17) \quad \left| k^2 - \frac{1}{g} \right| \geq \frac{21}{1024} \frac{1}{k^4} \lambda^2 |\mu \delta|$$

Remarques :

1) On remarque que l'équation (8.12) a, en dehors de la solution (8.13) encore une solution où M_0 et N_0 ne sont pas nulles. En effet, en faisant le rapport $\frac{P}{Q}$:

$$(8.18) \quad \frac{N_0}{M_0} = - \frac{2 M_0 N_0}{M_0^2 - N_0^2}$$

Alors, de (8.18) et (8.12), on obtient :

$$N_0 = \pm \sqrt{3} M_0 = \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} M_0$$

$$M_0 = + \frac{-3 \delta_1 \lambda_1 \pm \sqrt{-3072 a \delta_1^{-63} \delta_1^2 \lambda_1^2}}{96 \delta_1}$$

Si l'on remarque que l'équation (8.6) ne change pas (pour $n = 3$) lorsqu'on substitue x par $-x$ et τ par $\tau + \frac{\pi}{3}$, alors la solution obtenue ne diffère pas de (8.13).

2) De l'inégalité (*) on voit que les vibrations sous-harmoniques à fréquence (exactement) égale à la fréquence des vibrations libres des équations linéaires ne peuvent pas exister.

3) En tenant compte de (8.5), on peut écrire la deuxième équation de (8.12) qui détermine M_0 (quand $N_0 = 0$) sous la forme suivante :

$$9 k^2 = 1 + \frac{27}{4} \mu \delta \left[\left(M_0 - \frac{1}{2} \frac{3^2}{8} \lambda^2 \right) + \frac{7}{4} \left(\frac{3^2 \lambda}{8} \right)^2 \right]$$

Cette équation représente, dans le plan k, M_0 , soit une hyperbole, soit une ellipse, suivant que $\delta > 0$ ou $\delta < 0$. On remarque que k^2 a un maximum quand $\delta > 0$ et un minimum quand $\delta < 0$.

STOKER [88], KAC [50] et d'autres démontrent que les vibrations sous-harmoniques apparaissent comme le résultat de la bifurcation des vibrations harmoniques. Le point de bifurcation est le point d'intersection des courbes qui donnent l'amplitude harmonique (par. 7) et des courbes qui donnent "l'amplitude" de la composante harmonique dans le cas des vibrations sous-harmoniques.

B) Dans le cas de vibrations sous-harmoniques avec amortissement ($H \neq 0$, $\Psi \neq 0$), pour $n \neq 3$, les conditions de périodicité de x_1 prennent la forme :

$$(8.21) \quad \begin{cases} N_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{1-n} \right)^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + 2 H_1 M_0 = 0 \\ M_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{1-n} \right)^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] - 2 H_1 N_0 = 0 \end{cases}$$

Ces équations n'admettent que la seule solution $M_0 = N_0 = 0$.

b) Pour $n = 3$, on aura les équations :

$$(8.22) \quad \begin{cases} N_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2.64} \lambda_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] + 2 H_1 N_0 + \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 (M_0^2 - N_0^2) \\ \quad \sin \Psi + \frac{3}{16} \gamma_1 \lambda_1 M_0 N_0 \cos \Psi = 0 \\ M_0 \left[a + \frac{3\gamma_1}{2.64} \lambda_1^2 + \frac{3}{4} \gamma_1 (M_0^2 + N_0^2) \right] - 2 H_1 N_0 - \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 (M_0^2 - N_0^2) \\ \quad \cos \Psi + \frac{3}{16} \gamma_1 \lambda_1 M_0 N_0 \sin \Psi = 0 \end{cases}$$

qui, en dehors de $M_0 = N_0 = 0$, ont la solution :

$$(8.23) \quad N_0 = 0 ; M_0 = \frac{3 \gamma_1 F_1 \pm \sqrt{-3072 a \gamma_1 - (72 \gamma_1^2 \lambda_1^2 - 9 \gamma_1^2 F_1^2)}}{48 \gamma_1}$$

où $F_1 = \lambda_1 \cos \Psi$.

Pour que cette solution soit réelle, il faut que l'inégalité :

$$(8.24) \quad -1024 a \gamma_1 - 3 \gamma_1^2 (8 \lambda_1^2 - F_1^2) \geq 0 \quad \text{soit satisfaite}$$

ou il faut que a et γ_1 soient de signes contraires et que

$$(8.25) \quad |a| \geq \frac{3}{1024} |\gamma_1| (8 \lambda_1^2 - F_1^2)$$

puisque de $F_1^2 + G_1^2 = \lambda_1^2$: ($G_1 = \lambda_1 \sin \Psi$), il résulte que

$$\lambda_1^2 - F_1^2 \geq 0 \quad \text{et par conséquent} \quad 8 \lambda_1^2 - F_1^2 \geq 0.$$

En tenant compte de (8.5), l'inégalité (8.25) devient:

$$(8.26) \quad \left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \geq \frac{3.9}{1024} |\mu \gamma| \quad (e \lambda^2 - F^2)$$

En remplaçant $N_0 = 0$, dans la première équation (8.22), on trouve :

$$(8.27) \quad 2 H_1 + \frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 M_0 \sin \Psi = 0$$

De (8.27) il résulte que :

$$(8.28) \quad |\sin \Psi| = \left| - \frac{2 H_1}{\frac{3}{32} \gamma_1 \lambda_1 M_0} \right| \leq 1$$

d'où l'on trouve que :

$$(8.29) \quad 2 H_1 \leq \frac{3}{32} |\gamma_1 \lambda_1 M_0| \quad \text{ou} \quad 2 H \leq \frac{3.27}{32} |\gamma \lambda M_0|$$

qui démontre que les vibrations sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{n}$ ne sont pas possibles si le coefficient d'amortissement $2 \mu H$ n'est pas une quantité petite, au moins du même ordre que $\mu \gamma$.

Remarques :

1) Y.H. KU [51a], suivant la méthode (moins rigoureuse) de STOKER [88], trouve les inégalités :

$$(8.30) \quad \left| k^2 - \frac{1}{9} \right| \geq \frac{3}{1024} \frac{|\mu \gamma|}{k^4} (8 \lambda^2 - F^2)$$

$$2 H \leq \frac{3}{32 k^3} |\gamma \lambda M_0| \quad (\text{Comparer à (8.26 et (8.29))}).$$

2) Les vibrations sous-harmoniques ont été étudiées par plusieurs auteurs (Voir les notes : [6, 7, 19, 21, 25, 35, 38, 39, 41, 47, 50, 51, 53, 54, 62, 63, 84, 97]).

IX - PROBLEME DE LA STABILITE DES MOUVEMENTS PERIODIQUES ETUDIES.

A) On sait que seules les vibrations qui sont stables peuvent avoir une importance physique (pratique). Dans ce qui suit, on étudiera la stabilité des vibrations périodiques des systèmes non autonomes de la forme⁽¹⁾ :

$$(9.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

(1) L'équation de Duffing étudiée a aussi cette forme.

dans le sens de LIAPOUNOFF [61] . (Voir aussi [67, 68] et [109]). Dans l'équation (9.1) les fonctions f et G ont la période 2π par rapport à t ; k est différent d'un nombre entier pour le cas de non résonance ; $k = n$ (où n est un nombre entier) pour le cas de la simple résonance et $k = \frac{1}{n}$ dans le cas de la résonance d'ordre n (ou des sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{n}$). Comme nous l'avons vu jusqu'à présent, le mouvement périodique étudié (dont nous voulons établir la stabilité) a la forme :

$$(9.2) \quad x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots = \varphi(t)$$

x_0 étant la solution génératrice. La période $\omega^{(2)}$ de la solution (9.2) est égale à 2π pour le cas de non résonance et de la résonance simple et $\omega = 2\pi n$ pour le cas de la résonance d'ordre n . Pour décider sur la stabilité de la solution périodique (9.2), considérons une autre solution arbitraire de l'équation (9.1), de la forme :

$$(9.3) \quad x = \varphi(t) + y(t)$$

D'après LIAPOUNOFF [61] on dit que la solution périodique (9.2) de l'équation (9.1) est stable si, pour un nombre positif quelconque (aussi petit qu'on le veut) ε , on peut trouver un nombre positif η tel que, pour chaque solution (9.3) de l'équation donnée, pour tout $t > 0$, les inégalités $|y| < \varepsilon$, $|\dot{y}| < \varepsilon$ sont satisfaites dès que nous avons $|y(0)| \leq \eta$, $|\dot{y}(0)| \leq \eta$. Si, en même temps, on a bien $\lim_{t \rightarrow \infty} y = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y} = 0$, lorsque t croît indéfiniment, on dit que la solution périodique est asymptotiquement stable.

L'équation aux variations de l'équation (9.1) (c'est la première approximation de l'équation du mouvement troublé)(2) correspondant à la solution périodique (9.2), a la forme :

$$(9.4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \left[k^2 - \mu \frac{\partial F(t, \varphi, \dot{\varphi}, \mu)}{\partial \varphi} \right] y - \mu \frac{\partial F(t, \varphi, \dot{\varphi}, \mu)}{\partial \dot{\varphi}} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (3)$$

Cherchons deux solutions particulières $y_1(t)$ et

(1) La notation ω est plus facile à écrire.

(2) Voir l'Annexe.

(3) Quand $\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, l'équation (9.4) est connue sous le nom d'équation de HILL, et si en même temps $-\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \cos t$ (9.4) s'appelle équation de MATHIEU [88] .

$y_2(t)$ de cette équation (le système fondamental des solutions) satisfaisant aux conditions initiales :

$$(9.5) \quad y_1(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad \dot{y}_2(0) = 1$$

sous la forme des séries suivant les puissances de μ :

$$(9.6) \quad \begin{cases} y_1 = y_1^{(0)} + y_1^{(1)}\mu + y_1^{(2)}\mu^2 + \dots \\ y_2 = y_2^{(0)} + y_2^{(1)}\mu + y_2^{(2)}\mu^2 + \dots \end{cases}$$

Pour les fonctions $y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, y_2^{(0)}, y_2^{(1)}$ on obtiendra les équations différentielles :

$$(9.7) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y_1^{(0)}}{dt^2} + k^2 y_1^{(0)} = 0, & \frac{d^2 y_2^{(0)}}{dt^2} + k^2 y_2^{(0)} = 0 \\ \frac{d^2 y_1^{(1)}}{dt^2} + k^2 y_1^{(1)} = \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} y_1^{(0)} + \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \dot{y}_1^{(0)} \\ \frac{d^2 y_2^{(1)}}{dt^2} + k^2 y_2^{(1)} = \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} y_2^{(0)} + \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \dot{y}_2^{(0)} \end{cases}$$

satisfaisant aux conditions initiales :

$$(9.8) \quad \begin{cases} y_1^{(0)}(0) = 1, \quad \dot{y}_1^{(0)}(0) = 0, \quad y_1^{(1)}(0) = \dot{y}_1^{(1)}(0) = 0 \\ y_2^{(0)}(0) = 0, \quad \dot{y}_2^{(0)}(0) = 1, \quad y_2^{(1)}(0) = \dot{y}_2^{(1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Pour les coefficients A et B de l'équation caractéristique (de l'équation aux variations)

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0 \quad \text{où}$$

$$(9.9) \quad 2A = y_1(\omega) + \dot{y}_2(\omega), \quad B = y_1(\omega) \dot{y}_2(\omega) - \dot{y}_1(\omega) y_2(\omega)$$

on aura :

$$(9.10) \quad \begin{aligned} 2A &= [y_1^{(0)}(\omega) + \dot{y}_2^{(0)}(\omega)] + \mu [y_1^{(1)}(\omega) + \dot{y}_2^{(1)}(\omega) + \dots] \\ B &= e^{\mu \int_0^\omega \frac{\partial F(t, y, \dot{y}, \mu)}{\partial \dot{y}} dt} = 1 + \mu \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} dt + \dots \end{aligned}$$

où, en vertu de (9.7) et (9.8)

$$(9.11) \quad y_1^{(0)} = \cos k t, \quad y_2^{(0)} = \frac{1}{k} \sin k t$$

Des critères de la stabilité :

En vertu des théorèmes de A.M. LIAPOUNOFF, pour que la solution périodique étudiée soit stable, il faut que l'équation caractéristique (9.9) n'ait pas de racines ρ_i dont les modules sont supérieurs à 1, et il suffit que les modules des racines soient inférieurs à 1. Dans ce dernier cas, la solution périodique sera asymptotiquement stable.

Ces conditions peuvent être exprimés à l'aide des coefficients A et B en faisant en (9.9) la substitution

$$(9.12) \quad \rho = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$$

Alors, (9.9) prend la forme

$$(9.13) \quad (2A + B + 1) \lambda^2 + 2(-B + 1) \lambda + (-2A + B + 1) = 0$$

et pour la stabilité (comme on voit de (9.12)), il faut que les parties réelles des racines de l'équation (9.13) ne soient pas positives, c'est-à-dire (V. aussi le théorème de HURVITZ) :

$$(9.14) \quad 2A + B + 1 \geq 0, \quad -2A + B + 1 \geq 0, \quad -B + 1 \geq 0.$$

Ces conditions seront aussi suffisantes si elles sont satisfaites avec l'inégalité stricte (alors la stabilité sera asymptotique). En additionnant les deux premières inégalités (9.14), on obtient $B + 1 \geq 0$, qui en accord avec la dernière inégalité (9.14), donne :

$$(9.15) \quad |B| \leq 1$$

En vertu de (9.10), les deux premières conditions de (9.14) deviennent :

$$(9.16) \quad \begin{cases} 2 \cos k \omega + 2 + \mu (\dots) + \dots \geq 0 \\ -2 \cos k \omega + 2 + \mu (\dots) + \dots \geq 0 \end{cases}$$

Nous étudierons trois cas :

1) Cas de non résonance ($\omega = 2\pi$; $k \neq n$, n étant un nombre entier). Dans ce cas, les conditions (9.16) seront satisfaites toujours avec des signes d'inégalité stricte, pourvu que μ soit assez petit. Par conséquent, pour la stabilité il suffit que la condition (9.15) soit satisfaite (en vertu de

(9.10) elle s'écrit :

$$(9.17) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} dt < 0 \quad (\text{stabilité asymptotique}).$$

Remarque : Si l'expression (9.17) était positive, la solution périodique serait instable pour μ suffisamment petit. Si (9.17) est nulle, alors pour la stabilité il faudrait considérer aussi les termes d'ordre supérieur dans le développement de B et peut-être même dans l'équation du mouvement troublé.

2) Cas de la résonance simple ($\omega = 2\pi$, $k = n$).

Dans ce cas, puisque

$$(9.18) \quad y_1^{(0)}(\omega) = 1, \quad \dot{y}_1^{(0)}(\omega) = 0, \quad y_2^{(0)}(\omega) = 0, \quad \dot{y}_2^{(0)}(\omega) = 1$$

la première condition (9.16), pour μ suffisamment petit, est satisfaite avec le signe d'inégalité stricte. En ce qui concerne la deuxième (correspondant à la deuxième condition (9.14)) puisque le terme, qui ne contient pas μ , est nul, il faut la calculer plus exactement. Pour celle-ci, on calculera plus exactement les coefficients A et B . Conformément à (9.10) et (9.18), pour le coefficient A on aura :

$$(9.19) \quad 2A = 2 + \mu \left[y_1^{(1)}(2\pi) + \dot{y}_2^{(1)}(2\pi) \right] + \mu^2 \left[y_1^{(2)}(2\pi) + \dot{y}_2^{(2)}(2\pi) \right] + \dots$$

Pour le calcul du coefficient B , en substituant $y_1(\omega)$, $\dot{y}_1(\omega)$ et $y_2(\omega)$, $\dot{y}_2(\omega)$ de (9.9) à leurs valeurs obtenues de (9.6) et en considérant (9.18), on obtient :

$$(9.20) \quad B = 1 + \mu \left[y_1^{(1)}(\omega) + \dot{y}_1^{(1)}(\omega) \right] + \mu^2 \left[y_1^{(2)}(\omega) + \dot{y}_2^{(2)}(\omega) + y_1^{(1)}(\omega) \dot{y}_2^{(1)}(\omega) - \dot{y}_1^{(1)}(\omega) y_2^{(1)}(\omega) \right] + \dots$$

Alors, en vertu de (9.19) et (9.20), la deuxième condition (9.14) prend la forme :

$$(9.21) \quad \mu^2 \left[y_1^{(1)}(\omega) \dot{y}_2^{(1)}(\omega) - \dot{y}_1^{(1)}(\omega) y_2^{(1)}(\omega) \right] + \mu^3(\dots) + \dots \geq 0$$

Pour μ suffisamment petit, cette condition sera satisfaite avec le signe d'inégalité stricte si

$$(9.22) \quad y_1^{(1)}(\omega), \dot{y}_2^{(1)}(\omega) - \dot{y}_1^{(1)}(\omega) y_2^{(1)}(\omega) > 0$$

Les équations différentielles (9.7) satisfaisant aux conditions initiales (9.8) donnent :

$$y_1^{(1)} = \frac{1}{n} \int_0^t \left[\frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} \cos n\tau - \frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \sin n\tau \right]$$

$$\sin (t-\tau) d\tau .$$

$$y_2^{(1)} = \frac{1}{n^2} \int_0^t \left[\frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \sin n\tau + \frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \ddot{x}_0} \cos n\tau \right]$$

$$\cos n (t-\tau) d\tau .$$

et par conséquent :

(9.23)

$$y_1^{(1)}(\omega) = -\frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} \cos n\tau - n \frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \sin n\tau \right]$$

$$\sin n\tau d\tau$$

$$\dot{y}_1^{(1)}(\omega) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} \cos n\tau - n \frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \sin n\tau \right]$$

$$\cos n\tau d\tau$$

$$y_2^{(1)}(\omega) = -\frac{1}{n^2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} \sin n\tau + n \frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \cos n\tau \right] \sin n\tau d\tau$$

$$\dot{y}_2^{(1)}(\omega) = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial x_0} \sin n\tau + n \frac{\partial F(\tau, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} \cos n\tau \right] \cos n\tau d\tau$$

En tenant compte des résultats du par. 4, étant donné que x_0 a l'expression (6.23), où M_0 et N_0 satisfont aux équations (6.32), on trouve que :

$$y_1^{(1)}(\omega) = -\frac{1}{n} \frac{\partial P}{\partial M_0} , \quad \dot{y}_1^{(1)}(\omega) = \frac{\partial Q}{\partial M_0}$$

(9.24)

$$y_2^{(1)}(\omega) = -\frac{1}{n^2} \frac{\partial P}{\partial N_0} , \quad \dot{y}_2^{(2)}(\omega) = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial N_0}$$

et par conséquent la condition (9.22) deviendra :

$$(9.25) \quad \frac{\partial(P, Q)}{\partial(M_0, N_0)} < 0$$

Les conditions (9.25) et (9.17) assurent la stabilité asymptotique des solutions périodiques à la résonance. On remarque que la condition (9.17) peut s'écrire comme suit :

$$(9.26) \quad \left(-\frac{\partial P}{\partial M_0} + \frac{\partial Q}{\partial N_0} \right) < 0$$

puisque, en vertu de (9.23) et (9.24) :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} d\tau = y_1^{(1)}(\omega) + y_2^{(4)}(\omega) = \frac{1}{n} \left(-\frac{\partial P}{\partial M_0} + \frac{\partial Q}{\partial N_0} \right).$$

Par conséquent, conformément aux conditions (9.25) et (9.26), nous concluons : pour que la solution périodique soit asymptotiquement stable, il suffit que les racines de l'équation :

$$(9.27) \quad \begin{vmatrix} -\frac{\partial P}{\partial M_0} - \lambda & \frac{\partial Q}{\partial M_0} \\ -\frac{\partial P}{\partial N_0} & \frac{\partial Q}{\partial N_0} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

aient leurs parties réelles négatives.

3) Cas de la résonance d'ordre n ($k = \frac{1}{n}$, $\omega = 2\pi n$).

Dans ce cas, on garde sans changer toutes les conclusions précédentes (2°). Dans l'équation (9.27), il faut faire attention à présent que P et Q sont définis par les formules :

$$\begin{cases} P(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin \frac{t}{n} dt \\ Q(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi n} F(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos \frac{t}{n} dt \end{cases}$$

B) Appliquons les résultats obtenus plus haut à l'équation de Duffing [67] :

1) Dans le cas de non résonance, l'équation de Duffing (7.33) a la solution génératrice $x_0 = \frac{\lambda}{k^2 - n^2} \cos nt$. Pour

cette solution, la condition (9.17) - où nous remplaçons la limite supérieure de ω par $\frac{2\pi}{n}$) est satisfaite avec le signe d'égalité . Si nous avons considéré l'amortissement, c'est-à-dire si nous avons étudié l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = \mu \left(-2H \frac{dx}{dt} + \gamma x^3 \right) + \lambda \cos nt \quad (H > 0)$$

alors pour la solution génératrice correspondante, nous aurions eu :

$$\frac{\partial F(t, x_0, \dot{x}_0, 0)}{\partial \dot{x}_0} = -2H$$

et par conséquent la condition (9.17) serait satisfaite avec le signe d'inégalité stricte. Il faut donc considérer que la solution (cas de non résonance) est toujours stable.

2) A la résonance, lorsque $n^2 - \mu a = k^2$, l'équation des vibrations a la forme (7.19) et la solution génératrice est donnée par (7.20) où M_0 et N_0 satisfont aux équations (7.23). Les équations (7.23) admettent la solution $N_0 = 0$, $M_0 = A$; A étant la racine cubique de l'équation (7.24)

$$(9.28) \quad S(A) = \lambda + aA + \frac{3}{4} \gamma A^3 = 0$$

La condition (9.17) est satisfaite comme plus haut avec le signe d'égalité et la condition (9.25) devient :

$$-(a + \frac{9}{4} \gamma A^2) (a + \frac{3}{4} \gamma A^2) < 0$$

ou, en tenant compte que A est une racine de l'équation (9.28):

$$(9.29) \quad \frac{\lambda}{A} - \frac{dS(A)}{dA} < 0$$

Les racines de l'équation (9.28) sont données graphiquement par les points P , Q , R (Fig. 7). Puisque $S(-\infty) < 0$, alors la quantité $\frac{dS}{dA}$ est positive aux points P et R , et négative au point Q . En tenant compte du signe de la quantité A aux points considérés, de (9.29) on trouve que les solutions périodiques de l'équation (7.19), correspondant aux points P et Q , sont stables et la solution qui correspond au point R est instable.

Sur les figures 10 et 11, où l'on indique le caractère du développement des vibrations lorsque k varie, les courbes pleines correspondent aux vibrations stables, et les courbes en pointillé aux vibrations instables. Les courbes de résonance des

des figures 10 et 11 (nous pouvons aussi tenir compte de l'influence de la résistance) permettent de tirer une série de conclusions (le phénomène de saut).

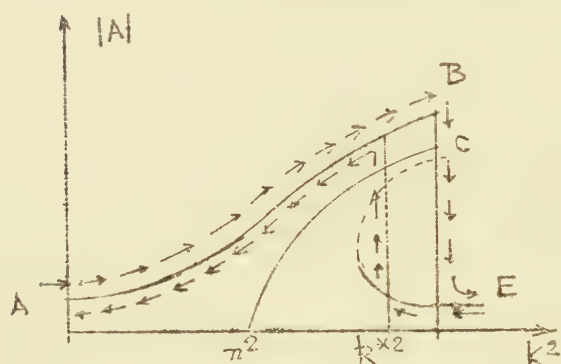


fig. 10 $\gamma > 0$

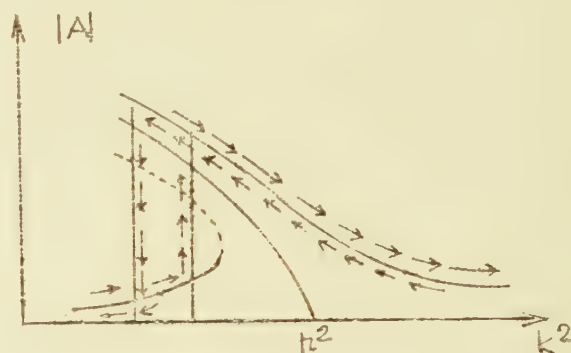


fig. 11 $\gamma < 0$

a) Soit $k^2 < n^2$ et la différence $k^2 - n^2$ suffisamment grande. Dans ce cas, l'amplitude des vibrations sera donnée par le point correspondant de la courbe AB (fig. 10). Si l'on augmente la fréquence k , l'amplitude des vibrations augmente aussi. Lorsque cette amplitude devient suffisamment grande, les vibrations, comme cela résulte aussi de l'interprétation physique, perdent leur stabilité. Supposons que ce fait ait lieu pour $k = k^*$ alors le système saute brusquement à un autre régime stable des vibrations, qui correspond à la branche stable DE de la courbe CDE. En diminuant k , les vibrations passent par saut de la branche DE sur la courbe AB, et ceci a lieu, en général, non pour $k = k^*$, mais pour $k < k^*$. A ce moment, l'amplitude des vibrations saute brusquement de F à G puis tend vers A continûment (pendant la diminution continue de k). Sur la figure 11 ($\gamma < 0$), le caractère du développement des vibrations en fonction de k est indiqué par des flèches.

Le phénomène du saut (caractéristique seulement aux systèmes non linéaires), a été souvent observé expérimentalement - Voir par exemple [73], [29], [4], etc...

Remarques :

1) Pour le problème de la stabilité des vibrations périodiques de l'équation de DUFFING, on peut consulter aussi les notes [4, 6a, 11, 12, 18, 19, 38, 39, 43, 44, 45, 48, 51a, 53, 60, 84, 85, 88-90, 99, 104, 110] .

2) BOGOLJUBOV [11], pour établir les zones des amplitudes stables ou instables à l'aide du graphique 10, donne la règle suivante : Sur les branches de la courbe $|A| = f(k)$, qui se trouvent à gauche de la courbe centrale (la courbe squelette) les portions sur lesquelles A augmente en même temps que k seront stables, c'est-à-dire celles qui correspondent aux ampli-

tudes stables ; sur les branches qui se trouvent à droite de la courbe centrale, inversement, les portions sur lesquelles A diminue en même temps que k seront stables.

Cette règle est plus générale et plus précise que celle donnée par STOKER [88] : les vibrations harmoniques correspondant aux points de la courbe des amplitudes qui sont situés entre les tangentes verticales seront instables (dans un certain sens).

----- 0 -----



C H A P I T R E I I

SOLUTIONS PERIODIQUES DE L'EQUATION DE DUFFING CONSIDEREE COMME UN SYSTEME APPROCHE DES SYSTEMES DE LIAPOUNOFF

-:-:-:-:-

I - ENONCE DU PROBLEME - SOLUTIONS GENERATRICES.

Considérons les vibrations forcées décrites par l'équation différentielle de DUFFING :

$$(1.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu a \cos mt$$

où $a > 0$, $\gamma > 0$, k sont certaines constantes, m est un entier et μ est un paramètre petit réel.

Pour $\mu = 0$, l'équation (1.1) se réduit à l'équation génératrice suivante :

$$(1.2) \quad \frac{d^2 x_0}{dt^2} + k^2 x_0 - \gamma x_0^3 = 0$$

En considérant que

$$(1.3) \quad x_0 = q(t)$$

est une solution périodique quelconque de l'équation génératrice, on pose le problème de trouver les solutions périodiques de l'équation (1.1) qui, pour μ suffisamment petit, diffèrent peu de la solution périodique (1.3) de l'équation (1.2), ou plus exactement, de trouver les solutions périodiques de l'équation (1.1) qui se réduisent à la solution périodique du système (1.2) pour $\mu = 0$.

Premièrement, il faut voir si l'équation génératrice autonome possède une solution périodique et si elle en possède une, il faut la trouver par une méthode convenable.

Deuxièmement, il faut étudier quelles sont les conditions pour lesquelles, à la solution périodique trouvée, correspond une seule solution périodique de l'équation (1.1). Ensuite, on calculera effectivement la solution par une méthode pratique et on la discutera.

L'équation génératrice (1.2) ou le système générateur correspondant :

$$(1.2') \quad \begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = -k y_0 \\ \frac{dy_0}{dt} = k x_0 - \frac{\delta}{k} x_0^3 \end{cases}$$

satisfait aux conditions suivantes :

1) L'équation déterminante correspondante :

$$(1.4) \quad \begin{vmatrix} -\rho & -k \\ k & -\rho \end{vmatrix} = \rho^2 + k^2 = 0$$

a une paire de racines purement imaginaires $\pm ki$ ($i = \sqrt{-1}$).

2) Les racines sont évidemment simples et d'autres racines n'existent pas.

3) Le système (1.2') ou l'équation (1.2) admet une intégrale de la forme :

$$(1.5) \quad \begin{cases} H = -\frac{k(x_0^2 + y_0^2)}{2} + \frac{\delta}{4k} x_0^4 = \text{const.} \\ H = \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + \frac{k^2 x_0^2}{2} - \frac{\delta}{4} x_0^4 = \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + V(x_0) = E ; \quad V(x_0) = \int (k^2 x_0 - \delta x_0^3) dx_0 = \frac{k^2 x_0^2}{2} - \frac{\delta}{4} x_0^4 \end{cases}$$

parce que le système (1.2') est conservatif.

Par conséquent, conformément à la définition donnée par MALKIN [67] (Annexe B, par. 1), le système (1.2') est un système LIAPOUNOFF, et pour celui-ci on a le théorème suivant : Dans un voisinage suffisamment petit de l'origine, le système de LIAPOUNOFF (1.2') admet une solution périodique qui dépend d'un paramètre arbitraire. Ce paramètre représente la valeur initiale de x , supposée petite. La valeur initiale de y est égale à zéro. La période de la solution est une fonction analytique de c , qui se réduit à $\frac{2\pi}{\lambda}$ pour $c = 0$. La solution même est aussi une fonction analytique par rapport à c qui se réduit à la solution triviale $x = y = 0$ (ou $x_0 = \dot{x}_0 = 0$) pour $c = 0$.

Dans la solution périodique considérée, on peut rem-

placer t par $t + h$ où h est une constante arbitraire car le système (1.2') est autonome. On obtiendra ainsi une solution périodique qui dépendra de deux constantes arbitraires.

Pour le calcul effectif de la solution périodique, dont l'existence a été établie plus haut, il sera préférable de traiter directement l'équation (1.2) ou (1.2') (méthode de LIAPOUNOFF [61, p. 336]).

En désignant par c une constante arbitraire et par T la série ;

$$(1.6) \quad T = \frac{2\pi}{k} (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots)$$

à coefficients h_j indéterminés, introduisons dans l'équation (1.2) ou (1.2'), au lieu de t une nouvelle variable indépendante τ au moyen de la substitution :

$$(1.7) \quad t = \frac{\tau}{k} (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots)$$

L'équation transformée sera :

$$(1.8) \quad \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + (x_0 - \frac{\delta}{k^2} x_0^3 (1 + h_1 c + h_2 c^2 + h_3 c^3 + h_4 c^4 + \dots))^2 = 0 ,$$

ou

$$(1.8') \quad \begin{cases} \frac{dx_0}{d\tau} = -y_0 (1 + h_1 c + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \dots) \\ \frac{dy_0}{d\tau} = (x_0 - \frac{\delta}{k^2} x_0^3) (1 + h_1 c + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \dots) \end{cases}$$

A la solution périodique de l'équation (1.2) ayant pour période T , correspond à présent une solution périodique de l'équation (1.8) ayant pour période 2π . Cette dernière solution sera aussi analytique par rapport à c . En effet, cette solution sera analytique par rapport au paramètre c qui entre directement dans l'équation (1.8) et elle sera aussi analytique par rapport aux conditions initiales. Les valeurs initiales de la solution périodique seront les mêmes qu'auparavant parce que les quantités τ et t s'annulent simultanément. Mais comme on l'a déjà vu, ces valeurs initiales seront $\underline{c}$ pour x et zéro pour $\dot{x}_0 = y_0$.

Par conséquent, la solution périodique considérée étant analytique par rapport à c et à ses valeurs initiales, sera analytique par rapport à c .

Cela étant établi, cherchons à satisfaire l'équation

(1.8) par une série de la forme suivante :

$$(1.9) \quad x_0 = c x_1(\tau) + c^2 x_2(\tau) + c^3 x_3(\tau) + \dots$$

dans laquelle tous les x_j sont des fonctions périodiques de τ ayant 2π pour période commune et satisfaisant aux conditions initiales :

$$(1.10) \quad x_1(0) = 1 ; x_2(0) = x_3(0) = \dots = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dots = 0$$

En introduisant dans l'équation (1.8) au lieu de x_0 sa valeur (1.9), on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(c \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + c^2 \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + c^3 \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + \dots \right) + \left[(c x_1 + c^2 x_2 + \dots) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\gamma}{k^2} (c x_1 + c^2 x_2 + \dots)^3 \right] (1 + h_1 c + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \dots)^2 = 0 \end{aligned}$$

et en égalant ici les coefficients des mêmes puissances de c on trouve les équations différentielles :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = 0 \\ & \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = -2 h_1 x_1 \\ & \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + x_3 = -2 h_2 x_1 - h_1^2 x_1 - 2 h_1 x_2 + \frac{\gamma}{k^2} x_1^3 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

qui permettront d'obtenir successivement tous les x_j dans l'ordre de j croissant sous forme de suites finies de sinus et cosinus de multiples entiers de τ , pourvu que l'on choisisse convenablement les constantes h_j . Les valeurs qu'il faudra attribuer aux constantes h_j se calculeront aussi successivement dans l'ordre de j croissant, et cela de telle façon que, pour toute valeur de j la constante h_{j-1} s'obtienne simultanément avec la fonction x_j .

Ainsi, en vertu de (1.10), pour la fonction x_1 , on obtient de (1.11) :

$$(1.12) \quad x_1 = \cos \tau$$

Pour que la fonction x_2 soit périodique (de période 2π) il faut et il suffit que :

$$- 2 h_1 \cos \tau = 0$$

De cette condition, il résulte que :

$$(1.13) \quad h_1 = 0$$

et par suite, l'équation (1.11) en x_2 , en vertu des conditions (1.10) donne :

$$(1.14) \quad x_2 = 0$$

L'équation qui détermine x_3 s'écrit alors :

$$(1.15) \quad \frac{d^2 x_3}{d\tau^2} + x_3 = - 2 h_2 \cos \tau + \frac{\gamma}{k^2} \cos^3 \tau = \left(\frac{3}{4} \frac{\gamma}{k^2} - 2 h_2 \right) \cos \tau + \frac{1}{4} \frac{\gamma}{k^2} \cos 3\tau$$

La condition de périodicité de la fonction x_3 donne :

$$(1.16) \quad h_2 = \frac{3}{8} \frac{\gamma}{k^2}$$

et l'équation (1.15) donne, pour x_3 , l'expression :

$$(1.17) \quad x_3 = - \frac{\gamma}{32 k^2} \cos 3\tau + \frac{\gamma}{32 k^2} \cos \tau$$

Pour déterminer x_4 , on aura l'équation :

$$\frac{d^2 x_4}{d\tau^2} + x_4 = - 2 h_3 x_1 = 2 h_3 \cos \tau$$

Cette équation donnera :

$$(1.18) \quad h_3 = 0$$

$$(1.19) \quad x_4 = 0$$

On remarquera, avant de continuer, que la série (1.9) ne renferme que des puissances impaires de c et que la série (1.7) ne renferme que des puissances paires de c , parce que l'équation proposée (1.2) ne change pas quand on y remplace x par $-x$.

Alors l'équation qui définit x_5 sera :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_5}{d\tau^2} + x_5 &= -2 h_4 x_1 - 2 h_2 x_3 + \frac{\delta}{k^2} (2 h_2 x_1^3 + 3 x_1^2 x_3) - h_2^2 x_1 = \\ &= -2 h_4 \cos \tau - \frac{3}{128} \frac{\delta^2}{k^4} (\cos \tau - \cos 3\tau) + \frac{\delta}{k^2} \left[\frac{3}{4} \frac{\delta}{k^2} \cos^3 \tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{32} \frac{\delta}{k^2} \cos^2 \tau (\cos \tau - \cos 3\tau) \right] - \frac{9\delta^2}{64k^4} \cos \tau \end{aligned}$$

Etant donné que

$$\cos^3 \tau = \frac{3}{4} \cos \tau + \frac{1}{4} \cos 3\tau : \cos^2 \tau \cos 3\tau = \frac{1}{4} \cos 5\tau + \frac{1}{4} \cos \tau + \frac{1}{2} \cos 3\tau$$

l'équation en x_5 devient :

$$(1.20) \quad \frac{d^2 x_5}{d\tau^2} + x_5 = (-2 h_4 + \frac{57}{128} \frac{\delta^2}{k^4}) \cos \tau + \frac{3}{16} \frac{\delta^2}{k^4} \cos 3\tau - \frac{3}{128} \frac{\delta^2}{k^4} \cos 5\tau$$

d'où l'on trouve :

$$(1.21) \quad \begin{cases} h_4 = \frac{57}{256} \frac{\delta^2}{k^4} \\ x_5 = \frac{23}{1024} \frac{\delta^2}{k^4} \cos \tau - \frac{3}{128} \frac{\delta^2}{k^4} \cos 3\tau + \frac{1}{1024} \cos 5\tau \end{cases}$$

En se bornant à ces approximations, la solution périodique de l'équation (1.21) et sa période s'expriment, approximativement, par les formules suivantes :

$$(1.22) \quad \begin{cases} t = \frac{\tau}{k} (1 + h_2 c^2 + h_4 c^4) \\ x_0 = c \cos \tau + c^3 x_3(\tau) + c^5 x_5(\tau) \\ x_3(\tau) = \frac{\delta}{32 k^2} \cos \tau - \frac{\delta}{32 k^2} \cos 3\tau \\ x_5(\tau) = \frac{23}{1024} \frac{\delta^2}{k^4} \cos \tau - \frac{3}{128} \frac{\delta^2}{k^4} \cos 3\tau + \frac{1}{1024} \frac{\delta^2}{k^4} \cos 5\tau \\ T = \frac{2\pi}{k} (1 + h_2 c^2 + h_4 c^4) ; h_2 = \frac{3}{8} \frac{\delta}{k^2} ; h_4 = \frac{57}{256} \frac{\delta^2}{k^4} \end{cases}$$

En remplaçant, dans ces expressions, t par $t + h$,

où h est une constante arbitraire, on obtient la solution périodique de l'équation (1.2) qui contient deux constantes arbitraires et qui, grâce à ce fait, représentera la solution générale.

Remarque : Compte tenu de cette dernière affirmation, il résulte que, quelles que soient les valeurs initiales a et b des quantités x_0 et $y_0 = \dot{x}_0$, la solution des équations (1.2') satisfaisant à ces valeurs initiales, sera périodique. Il faut seulement que a et b soient suffisamment petites, parce que les solutions périodiques considérées auparavant existent dans un voisinage assez petit de l'origine. Considérons le plan de phases pour les équations (1.2').

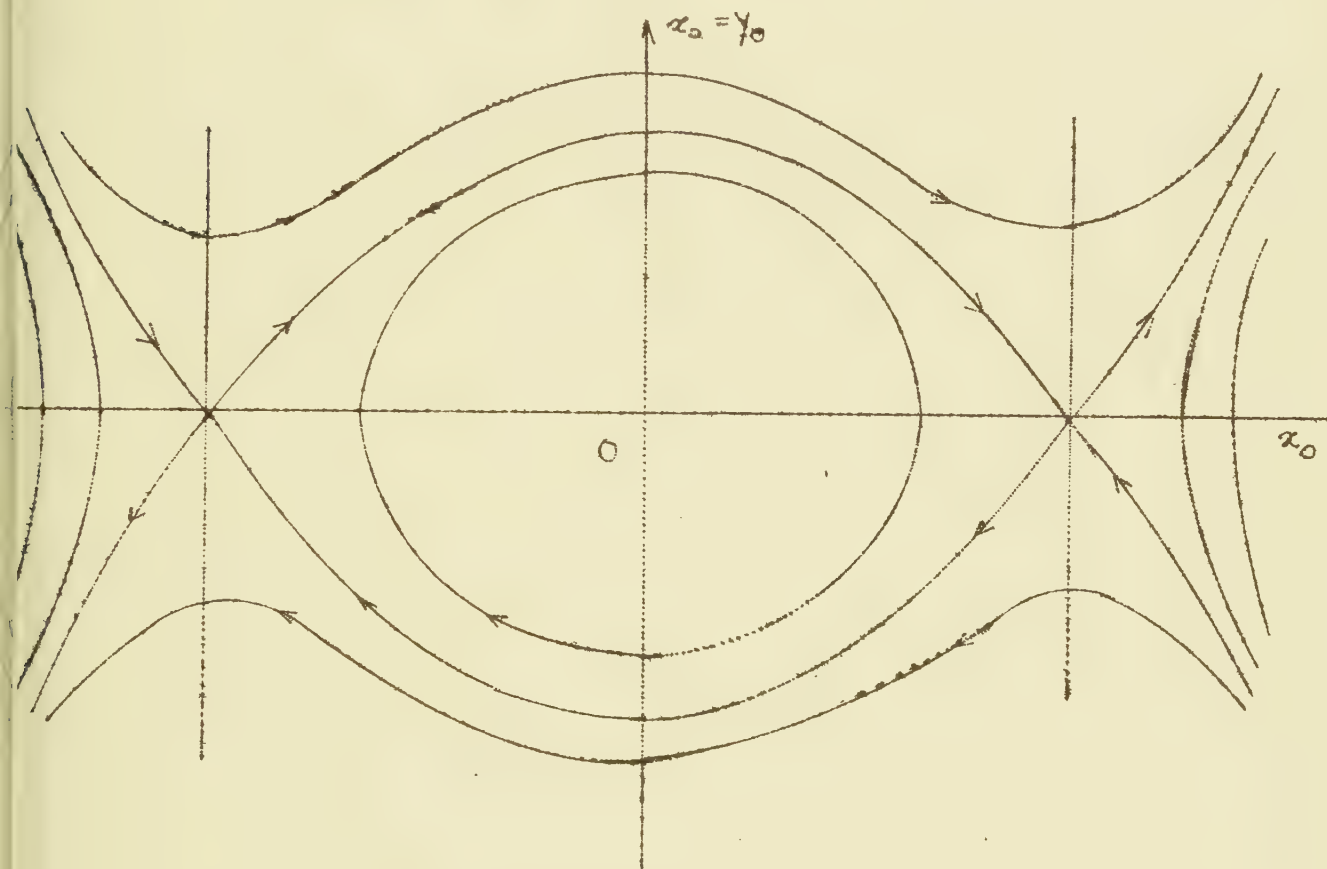


Figure 12

Toutes les trajectoires de phases qui se trouvent dans un voisinage assez petit de l'origine seront fermées, car les solutions correspondantes des équations (1.2') sont périodiques. Par conséquent, de même que pour les équations linéaires correspondantes :

$$(1.23) \quad \frac{dx_0}{dt} = -ky \quad ; \quad \frac{dy_0}{dt} = kx_0$$

l'origine est un centre (sommet). Les trajectoires de phases sont déterminées par l'intégrale (1.5), d'où il résulte que ces trajectoires de phases, dans un voisinage assez petit de l'origine, diffèrent peu des cercles qui représentent les trajectoires de phases des équations (1.23). Ainsi donc, dans un voisinage assez petit de l'origine, les plans de phases des équations (1.2') et des équations (1.23) diffèrent peu l'un de l'autre. Néanmoins, il existe une différence essentielle : la période de la révolution pour toutes les trajectoires de phases des équations (1.23) est égale à $\frac{2\pi}{k}$, tandis que pour les équations (1.2'), chaque trajectoire^k de phase a sa propre période de révolution égale à T (1.22).

Remarque 2 : Autre expression de la période T - Posons :

$$x_0 = \rho \cos \theta, \quad y_0 = \rho \sin \theta$$

et introduisons dans l'équation (1.2'), au lieu de x_0 et y_0 les variables ρ et θ .

On aura :

$$(1.24) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\gamma}{k} \rho^3 \cos^3 \theta \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} = k - \frac{\gamma}{k} \rho^2 \cos^4 \theta \end{cases}$$

L'intégrale (1.5) deviendra :

$$(1.5') \quad \rho^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2k^2} \rho^2 \cos^4 \theta \right) = \mu^2 = a^2 + b^2 - \frac{\gamma}{2k^2} a^4$$

(Voir B (4.11) et (4.14)),

où μ est la constante dans l'intégrale (1.5) et a et b sont les valeurs initiales de x_0 et y_0 .

De (1.5') on tire :

$$(1.25) \quad \rho^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\mu^2 \frac{\gamma}{k^2} \cos^4 \theta}}{\frac{\gamma}{k^2} \cos^4 \theta}$$

De la dernière équation (1.24) on obtiendra alors :

$$(1.26) \quad t = \frac{1}{k} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\mu^2 \frac{\gamma}{k^2} \cos^4 \theta}}$$

et la période T de la solution sera donnée par la formule :

$$(1.27) \quad T = \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\mu^2 \frac{\gamma}{k^2} \cos^4 \theta}} = \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} (1 + \mu^2 \frac{\gamma}{k^2} \cos^4 \theta + \\ + \frac{3}{2} \mu^4 \frac{\gamma^2}{k^4} \cos^8 \theta + \frac{5}{2} \mu^6 \cos^{12} \theta + \frac{38}{8} \mu^8 \frac{\gamma^4}{k^8} \cos^{16} \theta + \dots) d\theta$$

ou

$$(1.28) \quad T = \frac{2\pi}{k} (1 + \frac{3}{2} \frac{\gamma}{k^2} \mu^2 + \frac{3.35}{2.2} \frac{\gamma^2}{k^4} \mu^4 + \frac{5}{2} \frac{231}{2^{10}} \frac{\gamma^3}{k^6} \mu^6 + \dots)$$

On voit, de cette formule, que le développement analytique de période T contient seulement les puissances paires de μ , ce que l'on a d'ailleurs aussi obtenu par le calcul (V. la formule particulière (1.22)). Pour $a = c$ et $h = 0$, la formule (1.28) donne l'expression de T donnée par (1.22).

II - SOLUTIONS GENERATRICES PERIODIQUES AVANT LA PERIODE DONNEE.

Comme on l'a déjà montré, l'équation génératrice

$$(2.1) \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k^2 \xi - \gamma \xi^3 = 0$$

admet une solution périodique qui dépend de deux constantes arbitraires c et h :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= c \cos \tau + c^3 \xi_3(\tau) + \dots = c \cos \tau + c^3 \frac{\gamma}{32k^2} (\cos \tau - \cos 3\tau) + \\ &+ c^5 \frac{\gamma^2}{k^4} \left(\frac{23}{1024} \cos \tau - \frac{3}{128} \cos 3\tau + \frac{1}{1024} \cos 5\tau \right) + \dots \\ \tau &= k(t+h) (1 + h_2 c^2 + \dots)^{-1} = k(t+h) \left[1 + \frac{3}{8} \frac{\gamma}{k^2} c^2 + \frac{57}{256} \frac{\gamma^2}{k^4} c^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{315}{2^{11}} \frac{\gamma^3}{k^6} c^6 + \dots \right]^{-1} \end{aligned} \right.$$

$\xi_k(\tau)$ sont fonctions périodiques de période 2π par rapport à τ , satisfaisant aux conditions initiales :

$$\xi_k(0) = \dot{\xi}_k(0) = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

et $h_2, h_4, \dots$, sont des constantes. Les séries (2.2) convergent pour toutes les valeurs de h et pour toutes les valeurs suffisamment petites de c .

La période de la solution (2.2) est donnée par la relation :

$$(2.3) \quad T = \frac{2\pi}{k} (1 + h_2 c^2 + h_4 c^4 + \dots)$$

Conformément à la méthode générale, pour trouver les solutions périodiques de l'équation (1.1) (ayant la période $\frac{2\pi}{m}$) il faut avant tout trouver toutes les solutions de l'équation génératrice (2.1), qui ont la période égale à la période des parties droites de l'équation (1.1), c'est-à-dire à $\frac{2\pi}{m}$.

De l'expression de T , il résulte que pour trouver ces solutions il faut, pour h arbitraire, déterminer c de la relation

$$T = \frac{2\pi}{m}$$

On désignera par c_m le nombre c ainsi obtenu, et la solution génératrice correspondante par :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi^{(m)}(t+h) &= c_m \cos \tau + c_m^3 \xi_3(\tau) + c_m^5 \xi_5(\tau) + \dots, \quad \text{où} \\ \xi_3(\tau) &= -\frac{1}{32} \frac{\delta}{k^2} \cos \tau - \frac{1}{32} \frac{\delta}{k^2} \cos 3\tau \\ \xi_5(\tau) &= \frac{23}{1024} \frac{\delta^2}{k^4} \cos \tau - \frac{3}{128} \frac{\delta^2}{k^4} \cos 3\tau + \frac{1}{1024} \frac{\delta^2}{k^4} \cos 5\tau \\ \tau &= m(t+h) \end{aligned} \right.$$

L'équation qui détermine c_m a la forme (voir (2.3) et (2.4)) :

$$(2.6) \quad \frac{3}{8} \frac{\delta}{k^2} c^2 + \frac{57}{256} \frac{\delta^2}{k^4} c^4 + \dots = \frac{k-m}{m}$$

De là :

$$(2.6') \quad c + \frac{19}{64} \frac{\delta}{k^2} c^3 + \dots = \pm \sqrt{\frac{(k-m) k^2}{m \frac{3}{8} \delta}}$$

Cette équation a deux solutions qui s'annulent pour

$k = m$. Dans l'hypothèse $m > 0$ (fait qu'on peut toujours considérer satisfait), si $\gamma(k-m) < 0$, alors les deux solutions seront complexes. Mais si $\gamma(k-m) > 0$, alors les deux solutions seront réelles, l'une étant positive, l'autre négative.

Donc, si

$$(2.7) \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & \gamma > 0, \quad k > m \\ \text{b)} & \gamma < 0, \quad k < m \end{array}$$

on aura deux valeurs c_m réelles de signes opposés.

En choisissant m conformément à la relation (2.7) on obtient deux solutions génératrices périodiques

$$(2.8) \quad \left\{ \xi^{(m)}(t + h) \right\}$$

ayant la période $\frac{2\pi}{m}$.

En dehors de celles-ci, la solution triviale $\xi = 0$ de l'équation (2.1) peut être considérée comme solution périodique de période $\frac{2\pi}{m}$.

III - SOLUTIONS PERIODIQUES DE LA FORME $\{x^{(m)}\}$ DU SYSTEME (1.1).

On pose le problème de trouver la solution périodique de l'équation

$$(3.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu a \cos mt$$

solution qui se réduit à la solution génératrice (2.5). On désignera cette solution par $\{x^{(m)}\}$.

Etant donné que la solution génératrice dépend d'une constante arbitraire h , le problème considéré est un cas particulier du problème général étudié par MALKIN [65-67], KATZ [48], DROZDOV [28], LOUD [60]. Conformément aux résultats obtenus, pour que l'équation (3.1) admette une solution périodique, qui se réduise pour $\mu = 0$ à la solution génératrice (2.5), il faut que le paramètre h satisfasse à l'équation :

$$(3.2) \quad P(h) = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} a \cos mt \Psi(t) dt = 0$$

où $\Psi(t)$ est une solution périodique des équations adjointes

aux équations aux variations⁽¹⁾ :

$$(3.3) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \left[k^2 - 3\gamma \xi^{(m)^2} \right] y = 0$$

correspondant à la solution génératrice $\{\xi^{(m)}(t+h)\}$. Comme l'on sait, à chaque solution simple de l'équation (3.2), c'est-à-dire à chaque solution pour laquelle la condition

$$(3.4) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial h} \right)_{h=h_{sol}} \neq 0$$

est satisfaite, correspond en effet une seule solution périodique de l'équation (3.1) et une seule. Cette solution sera analytique par rapport à μ .

Remarque 1 : On remarque que l'équation aux variations⁽¹⁾ (3.3) (du système générateur (2.1)) qui correspond à une certaine solution de la famille (2.5) a deux solutions particulières

$$(3.5) \quad y_1 = \dot{\xi}^{(m)}(t+h, c_m) = \mu(t+h) = -c_m \sin m(t+h) + c_m^3 \dot{\xi}_3[m(t+h)] + c_m^5 \dot{\xi}_5[m(t+h)] + \dots$$

$$(3.6) \quad y_2^* = \left(\frac{\partial \xi(t+h, c)}{\partial c} \right)_{c=c_m}$$

parce que la fonction (2.2) représente la solution générale de l'équation (2.1) et conformément aux propriétés des équations aux variations, les dérivées partielles de la solution de l'équation (2.1) par rapport aux paramètres dont dépend cette solution (dérivées calculées pour le mouvement non troublé qui appartient à cette famille (2.4)), seront des solutions de l'équation aux variations (Voir [61, 75, 67]).

La solution $\mu(t+h)$ est une fonction périodique

(1) Les équations aux variations représentent la première approximation des équations du mouvement troublé, qui s'obtient en introduisant dans l'équation (3.1), au lieu de x la variable y , au moyen de la substitution $y(t) = x - \xi^{(m)}(t+h, c)$ et en tenant compte que $\xi^{(m)}(t+h, c_m)$ est une solution du système générateur (2.1).

de période $\frac{2\pi}{m}$ car elle est la dérivée d'une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{m}$.

La solution y_2^* ne sera pas périodique parce que la période de la fonction (2.2) dépend du paramètre c .

Pour analyser en détail la forme de y_2^* , on introduit dans la fonction $\xi(t+h, c)$, au lieu de t la variable τ au moyen de la substitution :

$$(3.7) \quad t + h = \frac{(\tau + h) T(c)}{\frac{2\pi}{m}}$$

et l'on désigne la fonction ainsi obtenue par $\xi^*(\tau, c)$. La fonction $\xi^*(\tau, c)$ sera périodique de période $\frac{2\pi}{m}$ par rapport à τ . En dérivant cette fonction par rapport à c , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^*}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} \xi^*\left(\frac{(\tau+h) T}{\frac{2\pi}{m}}, c\right) = \frac{\partial \xi(t+h, c)}{\partial c} + \frac{\tau+h}{\frac{2\pi}{m}} \frac{dT}{dc} \xi(t+h, c) = \\ &= \frac{\partial \xi(t+h, c)}{\partial c} + \frac{t+h}{T} \frac{dT}{dc} \xi(t+h, c) \end{aligned}$$

où la partie gauche est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{m}$ par rapport à τ . En faisant ici $c = c_m$, de (3.5), (3.6) et (2.4), on trouve :

$$(3.8) \quad y_2^* = -\frac{m}{2\pi} \frac{dT}{dc} \left\{ (t+h) u(t+h) + v(t+h) \right\}, \quad \text{où}$$

$$(3.9) \quad v(t+h) = -\frac{2\pi}{m} \left\{ \frac{1}{\frac{dT}{dc}} \frac{\partial \xi^*}{\partial c} \right\}_{c=c_m} = -\frac{2\pi}{m} \left\{ \frac{1}{\frac{dT}{dc}} \frac{\partial}{\partial c} \xi\left[\frac{(\tau+h) T}{\frac{2\pi}{m}}, c\right] \right\}_{c=c_m}$$

est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{m}$ par rapport au temps.

On trouve, compte tenu de (3.8) et (3.5), que l'équation (3.3) a aussi la solution particulière :

$$(3.10) \quad y_2 = t u(t+h) + v(t+h)$$

Quelques propriétés des fonctions u et v :

1) La fonction u satisfait à l'équation aux variations (3.3) et aux conditions initiales (pour $t+h = 0$)

$$(3.11) \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = -F(c_m) = -\left[k^2 c_m - \gamma c_m^3\right]$$

Ces conditions s'obtiennent directement de (3.5), (2.1) et :

$$(3.11') \quad \xi(0, c) = c, \quad \dot{\xi}(0, c) = 0 \quad (\text{Voir (2.2)}).$$

2) La fonction v satisfait à l'équation :

$$(3.12) \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + (k^2 - 3\gamma \xi^{(m)}) v = -2 \dot{u}(t+h)$$

étant donné que la fonction $t u + v$ satisfait à l'équation (3.3).

3) On trouve facilement, de (3.9) et (3.11'), l'égalité :

$$(3.13) \quad v(0) = -\frac{2\pi}{m} \left\{ \frac{1}{\frac{dT}{dc}} \frac{\partial \xi(0, c)}{\partial c} \right\}_{c=c_m} = -\frac{2\pi}{m \left(\frac{\partial T}{\partial c} \right)_{c=c_m}}$$

4) On trouve aussi l'égalité :

$$(3.14) \quad u^2 + u \dot{v} - \dot{u} v = K = \text{const.}$$

En effet, la partie gauche de (3.13) représente le déterminant vronskien

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & u t + v \\ \dot{u} & \dot{u} t + \dot{u} + \dot{v} \end{vmatrix}$$

des solutions y_1 et y_2 de l'équation aux variations. Etant donné que l'équation aux variations ne contient pas le terme avec la première dérivée, d'après un théorème connu de LIOUVILLE :

$$\Delta(t) = \Delta(t_0) e^{-\int_{t_0}^t q dt}$$

(où q est le coefficient de la première dérivée de l'équation du second ordre), nous en concluons que $K = \text{const.}$ On trouve, compte tenu de (3.11) et (3.13), que :

$$(3.15) \quad K = - \frac{2 \pi F(c_m)}{m \left(\frac{dT}{dc} \right)_{c=c_m}}, \quad F(c_m) = k^2 c_m - \gamma c_m^3$$

Remarque 2 : Considérons l'équation non homogène :

$$(3.16) \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} + F'(\xi^{(m)}) Z = f(t), \quad \text{où } F'(\xi^{(m)}) = k^2 - 3 \gamma \xi^{(m)};$$

$$f(t) = a \cos mt$$

Par vérification directe ou par la méthode de la variation des constantes arbitraires, on voit que la solution générale de l'équation (3.16) est donnée par :

$$(3.17) \quad K Z = u \int_0^t \left(\int_0^t u f dt - v f - \beta \right) dt + v \left(\int_0^t u f dt - \beta \right) + \alpha u$$

β, α , étant des constantes arbitraires.

Etant donné que $f(t)$ a la période $\frac{2\pi}{m}$, si

$$(3.18) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{m}} u f dt = 0$$

et si la constante β est choisie de sorte que :

$$(3.19) \quad \beta = - \frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} v f dt + \frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dt \int_0^t u f dt$$

alors, la solution (3.17) sera périodique (Voir Annexe A, par.5).

On remarque que la condition (3.18) peut être obtenue directement à partir de la condition générale de la périodicité (3.2), étant donné que l'équation (3.3) est auto-adjointe et, par conséquent, u est aussi une solution périodique de l'équation adjointe à l'équation (3.3), c'est-à-dire $\Psi(t) = u(t)$.

Ainsi, en résumant ce qui a été exposé dans ces remarques, on voit que (Voir (3.5), (3.9), (2.4), (2.5)) :

$$(3.20) \quad \begin{cases} u(t+h) = -c_m \sin m(t+h) + c_m^3 \xi_3[m(t+h)] + c_m^5 \xi_5[m(t+h)] + \dots, \\ v(t+h) = \frac{1}{A c_m} \left\{ \cos m(t+h) + 3 c_m^2 \xi_3[m(t+h)] + 5 c_m^4 \xi_5[m(t+h)] \right. \\ \left. + \dots \right\} \end{cases}$$

où

$$(3.21) \quad A = \frac{m}{k} (2 h_2 + 4 h_4 c_m^2 + 6 h_6 c_m^4 + \dots) \quad \text{et} \quad (V.(3.15))$$

$$(3.22) \quad K = \frac{-k (k^2 - \gamma c_m^2)}{m (2 h_2 + 4 h_4 c_m^2 + \dots)}$$

Ceci établi, on cherche la solution périodique de l'équation (3.1) sous forme de la série :

$$(3.23) \quad x^{(m)} = \xi^{(m)}(t+h) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots$$

où $x_k(t)$ sont certaines fonctions périodiques de période $\frac{2\pi}{m}$ par rapport à t .

En faisant dans l'équation (3.1) la substitution (3.23) et en égalant ensuite les coefficients pour les mêmes puissances de μ , nous obtenons les équations différentielles qui déterminent les fonctions $x_k(t)$. Après la substitution (3.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\xi^{(m)} + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) + k^2 (\xi^{(m)} + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots) - \\ - \gamma (\xi^{(m)} + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots)^3 = \mu a \cos mt \end{aligned}$$

En égalant ici les coefficients de μ , on obtient l'équation qui détermine x_1 :

$$(3.24) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k^2 - 3\gamma \xi^{(m)^2}) x_1 = a \cos mt$$

Pour que cette équation (qui coïncide avec (3.16)) admette une solution périodique, il faut et il suffit que h satisfasse à la condition (3.18) ou - ce qui est la même chose - il faut que h soit une racine de l'équation (3.21), où, comme on l'a vu, $\Psi(t) = u(t)$. Ainsi donc la condition de la périodicité de x_1 donne :

$$(3.25) \quad P(h) = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} a \cos mt \frac{d \xi^{(m)}(t+h)}{dt} dt = 0 \quad (1)$$

Cette équation sert à déterminer la constante h .

(1) Dans l'intégrale (3.25) on peut prendre la limite supérieure égale à 2π (car il n'y a pas besoin de considérer la période de $a \cos mt$ égale à sa période minime).

Pour résoudre l'équation (3.25), on remarque que (Voir (2.5)) :

$$\xi^{(m)}(t+h) = \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \cos (2j+1) m (t+h) , \quad \text{où}$$

$$A_1 = c_m + \frac{1}{32} \frac{\delta}{k^2} c_m^3 + \frac{23}{1024} \frac{\delta^2}{k^4} c_m^5$$

$$A_3 = -\frac{1}{32} \frac{\delta}{k^2} c_m^3 - \frac{3}{128} \frac{\delta^2}{k^4} c_m^5 + \dots$$

$$A_5 = \frac{1}{1024} \frac{\delta^2}{k^4} c_m^5 + \dots$$

et par conséquent l'équation qui détermine h prend la forme :

$$\begin{aligned} P(h) &= - \int_0^{\frac{2\pi}{m}} a \cos mt \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} (2j+1)m \sin(2j+1)m(t+h) dt = \\ &= - a A_1 m \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \cos mt \sin m(t+h) dt - \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \end{aligned}$$

$$(2j+1)m a \cos mt \sin(2j+1)m(t+h) dt = 0 ,$$

ou

$$P(h) = - \frac{a A_1 m}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} [\sin m(t+h) + \sin m h] dt + 0 = 0 . \quad \text{D'ici}$$

$$(3.26) \quad P(h) = - a A_1 \pi \sin m h = 0$$

L'équation (3.26) détermine deux valeurs pour l'angle $m h$, dont la somme est égale à π

$$(3.27) \quad h = 0 , \quad h = \frac{\pi}{m}$$

Comme on remarque de (3.26), la quantité $\frac{dP}{dh} = P'(h)$ diffère du zéro pour h donné par (3.27). Donc la solution (3.23) sera unique pour chaque h donné par (3.27).

Remarque : Si l'on considérait qu'il y avait deux valeurs différentes c_m (2.6) égales en modules et de signes contraires, il faudrait conclure qu'il y a 4 solutions périodiques $\{x^{(m)}\}$. Mais en réalité il existe seulement 2 solutions différentes $\{x^{(m)}\}$.

En effet, étant donné que la fonction $\xi^{(m)}(t+h)$ contient seulement les puissances impaires de c_m et seulement les multiples impairs de l'angle $m(t+h)$, alors en remplaçant mh par $-mh$, on remarque que la solution $\xi^{(m)}(t+h)$ qui correspond à une valeur de c_m donnée, passe dans la solution génératrice $\xi^{(m)}(t+h)$ qui correspond à la valeur de c_m de signe opposé. On peut donc supposer que l'angle mh est toujours aigu.

Dans ce cas, on supposera que $h = 0$. Dans la recherche de la fonction x_1 donnée par l'équation (3.24), on fera les calculs jusqu'aux grandeurs du premier ordre par rapport à c_m .

En utilisant les formules (3.17) et (3.19), la solution générale de l'équation (3.24) est donnée par la relation :

$$(3.28) \quad x_1 = \frac{1}{K} \left[u \int_0^t \left(\int_0^t u a \cos mt \, dt - v a \cos mt - \beta \right) dt + v \left(\int_0^t u a \cos mt \, dt - \beta \right) \right] + \alpha_1 u \equiv x_1^* + \alpha_1 u$$

où u , v et K sont respectivement donnés par les formules (3.20) et (3.22) ; α_1 , β , sont des constantes dont

$$(3.29) \quad \beta = -\frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} v a \cos mt \, dt + \frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dt \int_0^t u a \cos mt \, dt$$

et α_1 est déterminé par la condition de la périodicité de la fonction x_2 .

Nous allons calculer maintenant les intégrales qui se trouvent dans l'expression de x_1 (on mettra $\sin mh = 0$) :

$$(3.30) \quad \int_0^t u a \cos mt \, dt = -c_m a \int_0^t \left[\sin m(t+h) \cos mt + \dots \right] dt =$$

$$= \frac{c_m a}{4m} \left[\cos m(2t+h) - \cos mh \right] + \dots$$

$$(3.31) \quad \int_0^t \int_0^t (u a \cos mt \, dt) dt = \frac{c_m a}{4m} \int_0^t \left[\cos m(2t+h) - \cos mh \right] dt =$$

$$= \frac{c_m a}{4m} \left[\frac{1}{2m} \sin m(2t+h) - \cos mh \cdot t \right] + \dots$$

(3.32)

$$\int_0^t v a \cos mt \, dt = \frac{a}{A c_m} \int_0^t \left\{ \cos m(t+h) \cos mt + \frac{3 c_m^2 \delta}{32 k^2} [\cos m(t+h) \cos mt - \cos 3m(t+h) \cos mt] + \dots \right\} dt =$$

$$= \frac{a}{2 A c_m} \left(1 + \frac{3 c_m^2 \delta}{32 k^2} \right) \left[\frac{1}{2m} \sin m(2t+h) + \cos mh \cdot t \right] - \frac{a}{2 A c_m} \cdot$$

$$\cdot \frac{3 c_m^2 \delta}{32 k^2} \left[\frac{1}{4m} \sin m(4t+3h) + \frac{1}{2m} \sin(2t+h) \right]$$

Pour calculer β on utilise la formule (3.29) et, compte tenu de (3.30), (3.31), (3.32), on trouve :

$$(3.33) \quad \beta = - \frac{a}{2 A c_m} \left(1 + \frac{3 c_m^2 \delta}{32 k^2} \right) \cos mh - \frac{c_m a}{4m} \cos m h$$

En vertu des dernières formules et en tenant compte de l'approximation demandée, la formule (3.28) donne :

$$x_1 = \frac{a \cos mh}{2 K A^2 c_m^2} \left(1 + \frac{3 c_m^2 \delta}{32 k^2} \right) \cos m(t+h) + \frac{a}{4m A K} \sin m(2t+h) \sin m(t+h) +$$

$$+ \frac{a}{4m K A} \cos m(2t+h) \cos m(t+h) + \frac{3 \delta a}{32 k^2} [\cos m(t+h) - \cos 3m(t+h)] \cdot$$

$$\frac{\cos mh}{2 K A^2} + \alpha_1 u ,$$

ou :

$$(3.34) \quad x_1 = \frac{a \cos mh}{2 K A^2 c_m^2} \left(1 + \frac{6 c_m^2 \delta}{32 k^2} \right) \cos m(t+h) + \frac{a}{4m A K} \cos mt -$$

$$- \frac{3 \delta a \cos mh}{2 K A^2 32 k^2} \cos 3m(t+h) + \alpha_1 u$$

ou, compte tenu que $mh = 0$:

$$(3.34') \quad x_1 = \left[\frac{a}{2 K A^2 c_m^2} \left(1 + \frac{6 c_m^2 \delta}{32 k^2} \right) + \frac{a}{4m A K} \right] \cos mt - \frac{3 \delta a}{2 K A^2 32 k^2} \cos 3mt +$$

$$+ \alpha_1 u = x_1^* + \alpha_1 u ,$$

ou,

$$(3.34'') \quad x_1 = \frac{a}{2 K A} \left[\left(\frac{1}{A c_m^2} + \frac{3}{16 A k^2} + \frac{1}{2m} \right) \cos mt - \frac{3 \delta}{32 k^2 A} \cos 3mt \right] + \alpha_1 u$$

On détermine la constante α_1 par la condition de la périodicité de la fonction x_2 . Dans ce but, on écrira l'équation différentielle pour x_2 :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + (k^2 - 3\gamma \xi^{(m)^2}) x_2 = 3\gamma \xi^{(m)} x_1^2$$

D'après (3.18), la condition de la périodicité de la fonction x_2 a la forme :

$$(3.35) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{m}} 3\gamma \xi^{(m)} x_1^2 u \, dt = 0$$

on compte tenu de (2.5), (3.20) et (3.34') :

$$3\gamma \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left\{ c_m \cos mt + c_m^3 \frac{\gamma}{32k^2} (\cos mt - \cos 3mt) + \dots \right\} \left[\frac{a}{2KA^2 c_m^2} \left(1 + \frac{6c_m^2 \gamma}{32k^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a}{4m A K} \right] \cos mt - \frac{3\gamma a}{2KA^2 32k^2} \cos 3mt + \alpha_1 \left[-c_m \sin mt - c_m^3 \frac{\gamma}{32k^2} (\sin mt - \right. \\ \left. - 3\sin 3mt) \right] \left\{ -c_m \sin mt - c_m^3 \frac{\gamma}{32k^2} (\sin mt - 3\sin 3mt) \right\} dt = 0$$

Avant de résoudre cette équation, on fait quelques remarques :

Compte tenu de (3.34), l'équation (3.25) s'écrit (supposant $\gamma \neq 0$, on a simplifié par 3γ) :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} (x_1^* + \alpha_1 u^2) u \, dt = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left[\xi^{(m)} x_1^{*2} u + 2\alpha_1 \xi^{(m)} x_1^* u^2 + \right. \\ \left. + \alpha_1^2 \xi^{(m)} u^3 \right] dt = 0$$

De là, on tire :

$$\alpha_1 \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} x_1^* u^2 \, dt = -\alpha_1^2 \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} u^3 \, dt - \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} x_1^{*2} u \, dt$$

Dans cette expression, on voit facilement que le coefficient de α_1^2 est identiquement nul.

En effet, en vertu des formules (2.5) et (3.20), sup-

posant $mh = 0$, on a :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} u^3 dt = - \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} \cos(2j+1)mt \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} (2j+1)m \sin(2j+1)mt \right]^3 dt$$

Mais cette expression se réduit à une somme d'intégrales de la forme :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sin m p t \cos m q t dt$$

où p et q sont des entiers, intégrales qui sont toutes identiquement nulles. Ce fait résulte aussi de la théorie générale (Voir Annexe A, par. 3, ou [67]).

Donc, la valeur de α_1 sera donnée par :

$$(3.35') \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{- \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} x_1^{*2} u dt}{\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} x_1^* u^2 dt}$$

où $\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} x_1^* u^2 dt$, comme il résulte de la théorie générale (Annexe A, par. 3), est proportionnelle à $\left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_{h=0}$ et par

conséquent est différente du zéro. On peut d'ailleurs vérifier que cette expression diffère du zéro. En effet, en se bornant, dans les expressions de $\xi^{(m)}$, x_1 et u , aux termes inférieurs par rapport à c_m , on aura :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} x_1^* u^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} (c_m \cos mt + \dots) \left(\frac{a}{2KA^2 c_m^2} \cos mt + \dots \right) (-c_m \sin mt + \dots)^2 dt = \frac{a c_m}{8 KA^2} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sin^2 2mt dt = \frac{a \pi c_m}{8 AKA^2} \neq 0$$

qui est proportionnelle à $\left(\frac{\partial p(h)}{\partial h} \right)_{h=0} = -a A_1 \pi m = -a \pi m c_m$

(Voir (3.26)).

D'autre part, on remarque que l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} x_1^{*2} u \, dt &= - \int_0^{\frac{2\pi}{m}} c_m \cos mt \cdot \frac{a^2}{4K^2 A^4 c_m} \cos^2 mt \cdot c_m \sin mt \, dt = \\ &= - \frac{a^2}{16K^2 A^4 c_m} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} (3\cos mt + \cos 3mt) \sin mt \, dt = 0 \end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$(3.36) \quad \boxed{\alpha_1 = 0}$$

En conclusion, les formules (2.5), (2.6), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), (3.26), (3.27) et (3.36) déterminent la solution $\{x^{(m)}\}$.

IV - SOLUTION PERIODIQUE DE LA FORME $\{x^{(0)}\}$

Soit donnée l'équation :

$$(4.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu a \cos mt$$

et soit son équation génératrice :

$$(4.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = 0$$

Cette équation admet, évidemment, la solution

$$(4.3) \quad x = 0$$

qui peut être considérée comme une solution périodique ayant la période $\frac{2\pi}{m}$.

Le problème qui se pose est de trouver la solution périodique de l'équation (4.1), qui se réduit, pour $\mu = 0$, à la solution triviale $x = 0$.

On désignera cette solution par le symbole $\{x^{(0)}\}$ et on suivra la méthode exposée dans l'Annexe A, par.1.

L'équation aux variations de l'équation génératrice

(4.2), correspondant à la solution triviale $x = 0$, a évidemment la forme :

$$(4.4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0$$

qui, dans l'hypothèse $k \neq p$, p étant un entier réel, nous dit que l'équation déterminante

$$(4.5) \quad p^2 + k^2 = 0$$

n'a pas de racines de la forme $\pm p i$, c'est-à-dire que le système (4.4) n'a pas de solutions périodiques ayant la période $\frac{2\pi}{m}$. Par conséquent, la solution génératrice considérée sera isolée.

Dans ce cas, conformément au théorème général de POINCARÉ [75], le système (4.1) admet pour μ suffisamment petit une seule solution périodique et une seule, qui se réduit, pour $\mu = 0$, à la solution génératrice. Dans le cas de l'équation (4.1), cette solution périodique sera aussi analytique par rapport à μ .

Pour le calcul effectif de cette solution, on cherchera la solution sous forme de la série :

$$(4.6) \quad x^{(0)} = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

suivant les puissances de μ dont les coefficients sont des fonctions périodiques. La solution (4.6) satisfera formellement à l'équation (4.1). On détermine les coefficients x_j ($j = 1, 2, \dots$) à l'aide des équations différentielles obtenues, en remplaçant dans l'équation (4.1) x par la série (4.6) et en égalant les coefficients des mêmes puissances de μ .

$$(4.7) \quad \frac{d^2}{dt^2} (\mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots) + k^2 (\mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots) - \gamma (\mu x_1 + \mu^2 x_2 + \mu^3 x_3 + \dots)^3 = \mu a \cos mt$$

Pour déterminer x_1 et x_2 , on trouve les équations

$$(4.8) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 x_1 = a \cos mt \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k^2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Les seules solutions périodiques de ces équations ayant la période $\frac{2\pi}{m}$ (ou 2π) sont :

$$(4.9) \quad x_1 = \frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt$$

$$(4.10) \quad x_2 = 0$$

L'équation qui détermine x_3 sera alors :

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + k^2 x_3 = \gamma \frac{a^3}{(k^2 - m^2)^3} \cos^3 mt = \gamma \frac{a^3}{4(k^2 - m^2)^3} (3 \cos mt + \cos 3mt)$$

De là, on trouve :

$$(4.11) \quad x_3 = \gamma \frac{a^3}{4(k^2 - m^2)^3} \left[\frac{3}{k^2 - m^2} \cos mt + \frac{1}{k^2 - 9m^2} \cos 3mt \right]$$

Pour les fonctions x_4 et x_5 on trouve, ensuite, les équations :

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} + k^2 x_4 = 3 \gamma x_1^2 \quad x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_5}{dt^2} + k^2 x_5 = 3 \gamma x_1^2 x_3 = \frac{3 \gamma^2 a^4}{8(k^2 - m^2)^4} & \left[\frac{3}{k^2 - m^2} (1 + \cos 2mt) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k^2 - 9m^2} (\cos 4mt + \cos 2mt) \right] \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$(4.12) \quad x_4 = 0$$

$$\begin{aligned} (4.13) \quad x_5 = \frac{3 \gamma^2 a^4}{8(k^2 - m^2)^4} & \left[\frac{3}{k^2 (k^2 - m^2)} + \left(\frac{3}{k^2 - m^2} + \frac{1}{k^2 - 9m^2} \right) \frac{1}{k^2 - 4m^2} \cos 2mt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(k^2 - 9m^2)(k^2 - 16m^2)} \cos 4mt \right] \end{aligned}$$

Ainsi donc :

$$\begin{aligned} x^{(0)} = \mu \frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt + \mu^3 \frac{\gamma a^3}{4(k^2 - m^2)^3} & \left[\frac{3}{k^2 - m^2} \cos mt + \frac{1}{k^2 - 9m^2} \cos 3mt \right] + \\ & + \mu^5 x_5 + \dots \end{aligned}$$

sera la solution périodique cherchée $\{x^{(0)}\}$ de l'équation (4.1).

V - SOLUTION PERIODIQUE A LA RESONANCE : $\{x^{(rés)}\}$.

Le problème qui se pose est de trouver la solution périodique du système (4.1) qui se ramène à la solution génératrice triviale $x = 0$, dans le cas de la résonance, c'est-à-dire dans le cas où k est égal à un entier ou diffère d'un entier par une quantité petite d'ordre μ . Nous voulons trouver les vibrations du système dans le voisinage de la résonance $k = m$, soit donc :

$$m^2 - k^2 = \mu \lambda$$

En passant les termes correctifs dans le membre droit de l'équation (4.1), la dernière prend la forme :

$$(5.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + m^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt + \lambda x)$$

L'équation génératrice de l'équation (5.1) :

$$(5.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + m^2 x - \gamma x^3 = 0$$

est un système de LIAPOUNOFF, dont l'équation déterminante correspondante :

$$(5.3) \quad \rho^2 + m^2 = 0$$

admet deux racines purement imaginaires

$$(5.4) \quad \rho = \pm m i \quad , \quad m \text{ étant un nombre entier.}$$

Etant donné que $a \neq 0$, la résonance principale a lieu. Dans ce cas, étant donné que 2 est la moindre puissance de la quantité c dans le développement de la période

$$T = \frac{2\pi}{m} (1 + h_2 c^2 + h_4 c^4 + \dots), \text{ où } h_2 = \frac{3\gamma}{8k^2} \quad , \quad h_4 = \frac{57\gamma^2}{256k^4}$$

(Voir (2.21)), de la solution périodique du système générateur (5.2) satisfaisant aux conditions initiales : $x(0) = c$,

$\dot{x}(0) = 0$, conformément au théorème de MALKIN [67] (ou Annexe C, par. 3), il existe une seule solution périodique $x^{(rés)}$ de l'équation (5.1) et une seule, pour laquelle la fonction $x^{(rés)}$ s'annule pour $\mu = 0$ et cette fonction se développe en série suivant les puissances positives de la quantité $\frac{1}{2+\nu}$.

$$\nu = \mu$$

La série converge pour toutes les valeurs de μ , suffisamment petites.

Pour le calcul effectif de la solution périodique de l'équation (5.1) on cherchera à la satisfaire par une série à coefficients x_k périodiques de la forme :

$$(5.5) \quad x^{(\text{rés})} = x_1 \mu^{\frac{1}{3}} + x_2 \mu^{\frac{2}{3}} + x_3 \mu + \dots$$

En faisant dans l'équation (5.1) la substitution (5.5)

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_1 \mu^{\frac{1}{3}} + x_2 \mu^{\frac{2}{3}} + x_3 \mu + \dots) + m^2 (x_1 \mu^{\frac{1}{3}} + x_2 \mu^{\frac{2}{3}} + x_3 \mu + \dots) - \gamma (x_1 \mu^{\frac{1}{3}} + x_2 \mu^{\frac{2}{3}} + x_3 \mu + \dots)^3 = \mu [a \cos mt + \lambda (x_1 \mu^{\frac{1}{3}} + x_2 \mu^{\frac{2}{3}} + x_3 \mu + \dots)]$$

et en égalant ensuite les coefficients pour les mêmes puissances de μ , nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m^2 x_1 &= 0 & ; & \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + m^2 x_2 = 0 \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + m^2 x_3 &= \gamma x_1^3 + a \cos mt \\ \frac{d^2 x_4}{dt^2} + m^2 x_4 &= 3 \gamma x_1^2 x_2 + \lambda x_1 \\ \frac{d^2 x_5}{dt^2} + m^2 x_5 &= 3 \gamma x_1^2 x_3 + 3 \gamma x_1 x_2^2 + \lambda x_2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

dont les premières équations donnent :

$$(5.7) \quad \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos mt + B_1 \sin mt ; \\ x_2 &= A_2 \cos mt + B_2 \sin mt \end{aligned}$$

où A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , sont certaines constantes.

Pour que la fonction x_3 soit périodique, il faut et

il suffit que les coefficients de $\cos mt$ et $\sin mt$, dans l'équation :

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + m^2 x_3 = \gamma (A_1 \cos mt + B_1 \sin mt)^3 + a \cos mt =$$

$$= \frac{\gamma}{4} \left\{ \left[3 A_1^3 + 3 A_1 B_1^2 + \frac{4a}{\gamma} \right] \cos mt + 3 (B_1^3 + A_1^2 B_1) \sin mt + \right.$$

$$\left. + (A_1^3 - 3 A_1 B_1^2) \cos 3 mt + (3 A_1^2 B_1 - B_1^2) \sin 3 mt \right\} ,$$

soient nuls, c'est-à-dire :

$$(5.8) \quad \begin{cases} A_1 (A_1^2 + B_1^2) = -\frac{4a}{3\gamma} \rightarrow A_1 = -\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \\ B_1 (A_1^2 + B_1^2) = 0 \rightarrow B_1 = 0 \end{cases}$$

La fonction x_3 sera alors :

$$(5.9) \quad x_3 = \frac{a}{24 m^2} \cos 3 mt + A_3 \cos mt + B_3 \sin mt$$

Ensuite, les équations qui déterminent x_4 et x_5 deviennent :

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} + m^2 x_4 = \left(\frac{9\gamma}{4} \sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} A_2 - \lambda \right) \sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \cos mt +$$

$$+ \frac{3\gamma}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\gamma}\right)^2} B_2 \sin mt + \frac{3\gamma}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\gamma}\right)^2} \left[A_2 \cos 3mt + B_2 \sin 3mt \right]$$

$$\frac{d^2 x_5}{dt^2} + m^2 x_5 = \left\{ \frac{3\gamma}{4} \left(\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \right)^2 \left[\frac{a}{24 m^2} + 3 A_3 \right] - \frac{9\gamma}{4} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \frac{16\lambda^2}{81\gamma^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\lambda^2}{9\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \right\} \cos mt + \frac{3\gamma}{4} \left(\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \right)^2 B_3 \sin mt +$$

$$+ \left\{ \frac{3\gamma}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \right)^2 \left[\frac{a}{24 m^2} + \frac{A_3}{2} \right] - \frac{3\gamma}{4} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \frac{16\lambda^2}{81\gamma^2} \right\}$$

$$\cos 3 mt + \frac{3\gamma}{4} \left(\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \right)^2 B_3 \sin 3mt + \frac{3\gamma}{4} \left(\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \right)^2 \frac{a}{24 m^2}$$

$$\cos 5 m$$

Les conditions de la périodicité des fonctions x_4 et x_5 donnent :

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{4\lambda}{9\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} & B_2 &= 0 \\
 A_3 &= \frac{9\delta\sqrt[3]{3\delta}}{4\cdot 3\sqrt[3]{4a}} - \frac{16\lambda^2}{81\gamma^2} \frac{4}{3\gamma} \left(\sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \right)^2 - \frac{4\lambda^2}{27\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \frac{4}{3\gamma} \\
 (5.10) \quad & \left(\sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \right)^2 - \frac{a}{72m^2} = - \frac{a}{72m^2} \\
 B_3 &= 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution périodique de l'équation (5.1) à la résonance aura la forme :

$$\begin{aligned}
 (5.11) \quad x^{(rés)} &= - \sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \mu^{\frac{1}{3}} \cos mt + \mu^{\frac{2}{3}} \frac{4\lambda}{9\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \cos mt + \\
 &+ \mu \left[- \frac{a}{72m^2} \cos mt + \frac{a}{24m^2} \cos 3mt \right] + \mu^{\frac{4}{3}} x_5 + \dots
 \end{aligned}$$

VI- STABILITE DES SOLUTIONS PERIODIQUES.

Le problème qui se pose ici est d'étudier la stabilité des solutions périodiques de l'équation

$$(6.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu a \cos mt$$

solutions calculées dans les paragraphes précédents.

I) Pour résoudre le problème de stabilité de la solution périodique $\{x^{(m)}\}$ (3.23) (mouvement non troublé), on constituera l'équation aux variations. Dans ce but, on remplace, dans l'équation (6.1) x par :

$$x = \xi^{(m)}(t+h, c_m) + \mu x_1(t) + \dots + y$$

En négligeant dans l'équation ainsi obtenue (appelée aussi l'équation du mouvement troublé), les termes de degré supérieur au premier par rapport à y , on obtient l'équation aux variations :

$$(6.2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + (k^2 - 3\gamma \xi^{(m)^2}) y + \mu 6\gamma \xi^{(m)} x_1 y + \dots = 0$$

(correspondant à la solution $\{x^{(m)}\}$), où les termes non écrits contiennent les puissances de μ égales ou supérieures à deux :

$$\mu^2 \left[-3 \gamma (2 \bar{z}^{(m)} x_2 + x_1^2) \right] y + \dots$$

Remarque : Soit $y_{sj}(t)$, ($s, j = 1, 2$) (le premier indice de y se rapportant à la fonction inconnue, et le second à la solution) un système fondamental de solution de l'équation (6.2), satisfaisant aux conditions $y_{sj}(0) = \delta_{sj}$. Soit

$$\omega = \frac{2\pi}{m} \text{ la période des } y_{sj}(t).$$

Cela posé, le groupe de fonctions $y_{sj}(t+\omega)$, ($s, j = 1, 2$) représentera, par la nature de l'équation considérée (6.2), encore une solution.

Par suite, en désignant par a_{ij} certaines constantes, nous aurons :

$$y_{sj}(t+\omega) = a_{1j} y_{s1}(t) + a_{2j} y_{s2}(t)$$

L'équation algébrique formée à l'aide des constantes a_{ij} définies de cette manière :

$$a/ \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Voir } [61, 67, 75..])$$

s'appelle l'équation caractéristique de l'équation aux variations (6.2), correspondant à la période ω .

On peut facilement démontrer que, pour le système fondamental des solutions $y_{sj}(t)$ ainsi choisi, $a_{sj} = y_{sj}(\omega)$ et par conséquent l'équation caractéristique $a/$ devient $[67, p. 167]$:

$$(6.3) \quad D(\rho) = \begin{vmatrix} y_{11}(\omega) - \rho & y_{12}(\omega) \\ y_{21}(\omega) & y_{22}(\omega) - \rho \end{vmatrix} = 0$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les racines de l'équation caractéristique (6.3), correspondant à la période ω . En nous arrêtant à une détermination quelconque des logarithmes, posons :

$$(6.4) \quad \alpha_s = \frac{1}{\omega} \ln \rho_s \quad (s = 1, 2)$$

Les constantes α_s s'appellent des exposants caractéristiques du système (6.2). Les parties réelles de ces exposants, qui sont déterminées sans ambiguïté ($-\alpha_s$) sont les nombres caractéristiques du système (6.2).

Etant donné que la forme analytique des intégrales des équations linéaires à coefficients périodiques est de la forme :

$$y_s(t) = e^{\alpha_k t} \varphi_s(t)$$

pour chaque racine simple de l'équation caractéristique, ou

$$(6.5) \quad y_{si}^{(j)}(t) = e^{\alpha_k t} \frac{D^{(i-1)}}{Dt^{i-1}} P_s^{(j)} \quad (i = 1, \dots, n_j)$$

(groupe de solutions)

pour chaque racine ρ_k multiple d'ordre l , qui annule tous les mineurs du déterminant caractéristique jusqu'à l'ordre $n-p+1$ inclus, où $\varphi_s(t)$ est une certaine fonction périodique ayant la période ω ; $P_s^{(j)}$ sont des polynômes en t à coefficients périodiques de la forme :

$$P_s^{(j)}(t) = \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \varphi_{s1}^{(j)} + \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \varphi_{s2}^{(j)} + \dots + \varphi_{sn_j}^{(j)},$$

$$(n_1+n_2+\dots+n_p=l; j=1, \dots, p),$$

les dérivées $\frac{D^{(i-1)}}{Dt^{i-1}} P_s^{(j)}$ étant prises en regardant comme constants les coefficients périodiques des puissances de t et

$$(6.6) \quad y_s(t+\omega) = \rho_k y_s(t),$$

on aura le théorème suivant de LIAPOUNOFF [61] :

Quand l'équation caractéristique, du système aux variations correspondant au mouvement périodique étudié, n'a que des racines dont les modules sont inférieurs à 1, le mouvement non troublé ($\{x^{(m)}\}$ par exemple) sera stable, et cela de telle manière que tout mouvement troublé qui en est suffisamment voisin s'en rapproche asymptotiquement. Mais si, au nombre des racines de cette équation, il s'en trouve dont les modules sont égaux à 1 (toutes les autres racines ayant des modules inférieurs à 1), le problème de la stabilité du mouvement périodique étudié (non troublé) se résoud par des termes non linéaires dans l'équation du mouvement perturbé (le cas critique).

Dans le cas étudié ici, l'équation (6.2) se réduit, pour $\mu = 0$, à l'équation (3.3) :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (k^2 - 3 \gamma \sum (m)^2) y = 0$$

Les exposants caractéristiques de l'équation (6.2) (qui ont la forme $\alpha_i = \alpha_i^* + a_i(\mu)$, où α_i^* sont les exposants caractéristiques de l'équation (3.3), et $a_i(0) = 0$ - Voir [67, p.196] - qui résolvent la stabilité ou l'instabilité de la solution $\{x^{(n)}\}$ se réduisent, pour $\mu = 0$, aux exposants caractéristiques de l'équation (3.3), qui représente l'équation aux variations du système générateur pour la solution génératrice. Pour cela, si μ est suffisamment petit, alors pour le problème de la stabilité on peut considérer, au lieu des exposants caractéristiques de l'équation (6.2), les exposants caractéristiques de l'équation (3.3), à l'exception de ceux qui ont les parties réelles nulles.

Mais l'équation (3.3) a deux solutions indépendantes (3.5) et (3.10). Par conséquent, les deux exposants caractéristiques - Voir (6.5) - de l'équation (6.2) s'annulent pour $\mu = 0$ et, par suite, il faudra les calculer plus exactement. On peut faire cela parce que l'on connaît la solution générale de l'équation (3.3).

Etant donné que la forme des solutions (3.5) et (3.10) - Voir aussi (3.5) - montre qu'à l'exposant caractéristique nul α_i^* de l'équation (3.3) correspond un seul groupe de solutions (et non pas deux) et en outre, vu que $\int_0^{2\pi} \sum^{(m)} x_1 dt \neq 0$

[67, p.223], alors les exposants caractéristiques de l'équation (6.2) se développeront suivant les puissances entières de $\sqrt{\mu}$:

$$\alpha_1 = \alpha_{11} \sqrt{\mu} + \alpha_{12} \mu + \alpha_{13} (\sqrt{\mu})^3 + \dots \quad (6.7)$$

$$\alpha_2 = -\alpha_{11} \sqrt{\mu} + \alpha_{12} \mu - \alpha_{13} (\sqrt{\mu})^3 + \dots$$

Conformément aux résultats obtenus par MALKIN [67] et KAC [48] (Voir Annexe A, par. 6), les conditions de stabilité sont données par les inégalités :

$$\begin{aligned} K \frac{dP(h)}{dh} &\leq 0 & (\alpha_1^2 &\leq 0) \\ (6.8) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \right) dt &\leq 0 & (\alpha_2 &\leq 0) \end{aligned}$$

où f est la partie droite de l'équation (6.1) :

$$f = a \cos mt$$

La première de ces conditions, compte tenu de (3.22) et (3.26), devient :

$$K \frac{dP(h)}{dh} = \frac{a \pi \cos m h}{m(2h_2 + 4h_4 c_m^2 + \dots)} (k^2 - \gamma c_m^2) \left(1 + \frac{1}{32} \frac{\gamma}{k^2} c_m^2 + \dots\right) c_m \leq 0$$

Il en résulte qu'elle sera satisfaite, pour c_m suffisamment petit, avec le signe d'inégalité stricte si $c_m < 0$ et elle ne le sera pas si $c_m > 0$.

La deuxième condition se réduit à une égalité⁽¹⁾ parce que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Par conséquent, parmi les deux solutions périodiques $\{x^{(m)}\}$, la solution qui correspond à la valeur négative de c_m sera quasi-stable (Voir LOUD [60]) et la solution qui correspond à c_m sera instable.

II) Pour la stabilité de la solution périodique (4.14): $\{x^{(0)}\}$, on constituera l'équation aux variations.

En faisant, dans l'équation (6.1) :

$$x = x^{(0)} + y = \mu \frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt + \mu^2 \frac{\gamma a^3}{4(k^2 - m^2)^3} \left[\frac{3}{k^2 - m^2} \cos mt + \frac{1}{k^2 - 9m^2} \cos 3mt \right] + \dots + y$$

on obtient pour la solution $\{x^{(0)}\}$ l'équation suivante aux variations :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y - 3 \gamma x^{(0)^2} y = 0, \quad \text{ou}$$

(1) Mais si l'on avait considéré l'amortissement (c'est-à-dire l'équation (Voir par.10) : $\ddot{x} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu(a \cos mt - 2H \dot{x})$ la deuxième condition sera satisfaite avec le signe d'inégalité stricte.

$$(6.9) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y - 3 \gamma \frac{a^2}{(k^2 - m^2)^2} \mu^2 \cos^2 mt y + \mu^4 \dots + \dots = 0$$

où les termes non écrits contiennent les puissances de μ supérieures à deux.

On peut écrire l'équation (6.9) sous forme du système :

$$(6.10) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \left[-k^2 + \mu f_{21}(t, \mu) \right] x_1 \end{aligned}$$

où on a désigné :

$$(6.11) \quad y = x_1 ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = x_2 ; \quad f_{21} = 3 \gamma \frac{a^2}{(k^2 - m^2)^2} \mu \cos^2 mt .$$

D'après un théorème connu de LIAPOUNOFF [61], étant donné que les coefficients du système (6.10) sont des fonctions analytiques de μ , alors les coefficients de l'équation caractéristique

$$(6.12) \quad \begin{vmatrix} x_{11}(2\pi) - \rho & x_{21}(2\pi) \\ x_{12}(2\pi) & x_{22}(2\pi) - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \rho^2 - 2A(\mu)\rho + 1 = 0$$

seront des fonctions analytiques par rapport à μ .

L'équation (6.10) devient, pour $\mu = 0$:

$$(6.13) \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2 ; \quad \frac{dx_2}{dt} = -k^2 x_1$$

et l'équation caractéristique correspondante :

$$(6.14) \quad \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -k^2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k^2 = 0$$

Étant donné que les racines de l'équation caractéristique (6.14), pour $\mu = 0$, sont simples :

$$(6.15) \quad \lambda_1 = ki ; \quad \lambda_2 = -ki$$

il en résulte que l'équation (6.12) admettra, pour μ suffisam-

ment petit, pour chaque racine simple λ , une solution $\rho(\mu)$ et une seule, pour laquelle $\rho(0) = \lambda$ et cette solution sera analytique par rapport à μ . Dans ce cas, l'exposant caractéristique correspondant sera aussi analytique par rapport à μ :

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} i_1 \rho(\mu), \text{ donc (par exemple pour } \lambda = +ki)$$

$$(6.16) \quad \alpha = ki + \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots$$

où a_i sont des constantes inconnues pour le moment.

Pour la stabilité du mouvement périodique étudié x^0 , il faut calculer plus exactement les exposants caractéristiques correspondants parce que les parties réelles des racines λ_i ($i = 1, 2$) sont toutes nulles.

Dans ce but, en utilisant la méthode indiquée par SIMANOV [94] (ou [5] [67]) on fera, dans l'équation (6.10) la substitution

$$(6.17) \quad x_1 = e^{\alpha t} y_1 ; \quad x_2 = e^{\alpha t} y_2, \text{ où } \alpha \text{ est donné par (6.16).}$$

On essaiera de déterminer les constantes inconnues $a_1, a_2, a_3, \dots$, de telle façon que les équations transformées

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 - ki y_1 - \mu(a_1 + \mu a_2 + \mu^2 a_3 + \dots) y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -k^2 y_1 - ki y_2 + \mu f_{21} y_1 - \mu(a_1 + \mu a_2 + \dots) y_2 \end{aligned}$$

aient des solutions périodiques de période 2π (ou $\frac{2\pi}{m}$).

On cherchera la solution périodique du système (6.18) par une méthode d'approximations successives.

On remarque tout d'abord que le système (6.18), où on fait $\mu = 0$:

$$(6.19) \quad \begin{cases} \frac{dy_1^{(0)}}{dt} = y_2^{(0)} - ki y_1 \\ \frac{dy_2^{(0)}}{dt} = -k^2 y_1 - ki y_2 \end{cases}$$

a au moins une solution périodique. En effet, si $\lambda_1 = ki$ est

une racine de l'équation (4.14), alors $\lambda_1 - ki = 0$ est une racine de l'équation caractéristique du système (6.19) et par conséquent (6.19) a au moins une solution périodique.

On voit facilement que :

$$(6.20) \quad y_1^{(0)} = M_1^* \quad ; \quad y_2^{(0)} = ki M_1^*$$

où M_1^* est une constante arbitraire, représente une solution périodique du système (6.19).

Pour le système (6.18), on cherchera la solution périodique de période 2π sous la forme :

$$(6.21) \quad \begin{aligned} y_1 &= M_1^* + \mu y_1^{(1)} + \mu^2 y_1^{(2)} + \dots = y_1^{(0)} + \mu y_1^{(1)} + \mu^2 y_1^{(2)} + \dots \\ y_2 &= M_1^* ki + \mu y_2^{(1)} + \mu^2 y_2^{(2)} + \dots = y_2^{(0)} + \mu y_2^{(1)} + \mu^2 y_2^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

où M_1^* est une constante arbitraire $y_s^{(i)}$ ($s = 1, 2$; $i=1,2,3$) sont certaines fonctions périodiques.

Pour $y_s^{(1)}$ on aura :

$$(6.22) \quad \begin{cases} \frac{dy_1^{(1)}}{dt} = y_2^{(0)} - ki y_1^{(1)} - a_1 y_1^{(0)} \\ \frac{dy_2^{(1)}}{dt} = -k^2 y_1^{(1)} - ki y_2^{(1)} - a_1 y_2^{(0)} \end{cases}$$

Etant donné que le système adjoint au (6.19) :

$$\frac{dz_1}{dt} = ki z_1 + k^2 z_2 \quad ; \quad \frac{dz_2}{dt} = z_1 + ki z_2$$

a la solution périodique $\Psi_{11} = ki$, $\Psi_{21} = 1$, alors la condition de périodicité

$$(6.23) \quad \int_0^{2\pi} \left\{ (-a_1 y_1^{(0)}) \Psi_{11} + (-a_1 y_2^{(0)}) \Psi_{21} \right\} dt = 0$$

donne :

$$(6.24) \quad a_1 = 0$$

En continuant les calculs, comme on le verra dans les paragraphes ultérieurs, on trouve que a_2 est purement imaginaire, $a_3 = 0$, etc..., c'est-à-dire que les exposants caractéristiques ont les parties réelles nulles. De cette analyse, nous ne pouvons tirer aucune conclusion sur la stabilité du mouvement $x^{(0)}$. Néanmoins, en tenant compte (comme on le verra également dans les paragraphes suivants) que, dans le cas où il apparaît un petit amortissement, le mouvement correspondant $x^{(0)}$ est asymptotiquement stable, on peut conclure que le mouvement étudié $x^{(0)}$ est quasi-stable.

III) Pour la stabilité de la solution périodique $x^{(rés)}$ du système (5.1) à la résonance, il faut satisfaire à la condition (Voir Annexe C, par. 6) :

$$(6.25) \quad \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] dt = 0$$

où X, Y sont des fonctions de x et y ; f, F sont des fonctions de x, y, μ, t , si l'on écrit l'équation (5.1) sous la forme :

$$(6.26) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -m y + X(x, y) + \mu f(t, x, y, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= m y + Y(x, y) + \mu F(t, x, y, \mu) \end{aligned}$$

où, bien entendu :

$$\begin{aligned} X(x, y) &= 0 ; \quad Y(x, y) = -\frac{\gamma}{m} x^3 ; \quad f(t, x, y, \mu) = 0 ; \\ F(t, x, y, \mu) &= -\frac{1}{m} (a \cos mt + \lambda x) \end{aligned}$$

Dans le cas de l'équation (5.1), la condition (6.26) est satisfaite avec le signe d'égalité. Alors la solution $x^{(rés)}$ sera aussi quasi-stable.

VII - SOLUTION PERIODIQUE DE LA FORME $x^{(m)}$ EN PRESENCE D'UNE FORCE DE RESISTANCE.

Considérons le système avec la force de rappel non linéaire $F(x) = k^2 x - \gamma x^3$, soumis aussi à une force de résistance linéaire et à une force perturbatrice harmonique. toutes les deux considérées petites. L'équation du mouvement sera :

$$(7.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt - 2H \frac{dx}{dt}) ; \quad a > 0 , \\ H > 0 , \\ \gamma > 0$$

On pose le problème de trouver la solution périodique de l'équation (7.1) qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution génératrice $\xi^{(m)}(t+h)$ (2.5). On désignera cette solution toujours par $\{x^{(n)}\}$.

En utilisant les résultats du 3ème paragraphe, on cherchera la solution périodique de l'équation (7.1) sous forme de la série :

$$(7.2) \quad x^{(m)} = \xi^{(m)}(t+h) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots$$

$x_i(t)$ sont certaines fonctions périodiques de période $\frac{2\pi}{m}$.

Pour déterminer x_1 , on trouve l'équation suivante :

$$(7.3) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k^2 - 3\gamma \xi^{(m)^2})x_1 = a \cos mt - 2H \frac{d\xi^{(m)}}{dt}$$

Pour que cette équation (Voir (3.16)) admette une solution périodique, il faut et il suffit que n satisfasse la condition (3.18), c'est-à-dire :

$$(7.4) \quad P(h) = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} (a \cos mt - 2H \frac{d\xi^{(m)}}{dt}(t+h)) \frac{d\xi^{(m)}}{dt}(t+h) dt = 0$$

Etant donné que (Voir (2.5)) :

$$(7.5) \quad \begin{cases} \xi^{(m)}(t+h) = A_1 \cos m(t+h) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \cos(2j+1)m(t+h) \\ \frac{d\xi^{(m)}}{dt} = -A_1 m \sin m(t+h) - \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} (2j+1)m \sin(2j+1)m(t+h) \end{cases}$$

$$\text{où } A_1 = \frac{a}{m} + \frac{1}{32} \frac{\gamma}{k^2} c_m^3 + \dots ; \quad A_3 = -\frac{1}{32} \frac{\gamma}{k^2} c_m^3 + \dots$$

alors :

$$P(h) = - \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left\{ a \cos mt + 2H \left[A_1 m \sin m(t+h) + \right. \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1)m A_{2j+1} \sin(2j+1)m(t+h) \Big] \Big\} \left[A_1 m \sin m(t+h) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} (2j+1)m \sin(2j+1)m(t+h) \right] dt = 0, \text{ où}$$

$$P(h) = - \frac{a A_1 m}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} [\sin m(2t+h) + \sin mh] dt - 0 - \frac{2 H A_1^2 m^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} [1 - \cos 2m(t+h)] dt - \frac{2 H m^2}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \int_0^{\frac{2\pi}{m}} [1 - \cos 2m(2j+1)(t+h)] dt = 0$$

De la dernière relation, on tire :

$$(7.4'') \quad P(h) = - a A_1 \pi \sin m h - 2 H A_1^2 m \pi - 2 \pi H m \left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right] = 0$$

De là :

$$(7.4') \quad \sin m h = - \frac{2 H A_1 m}{a} - \frac{2 H m}{a A_1} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2$$

Cette équation a deux racines réelles si

$$\frac{a}{2 H} > \left| \frac{m}{A_1} \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right|$$

L'équation (7.4') détermine, pour l'angle mh , deux valeurs dont la somme est égale à 2π . La quantité

$$(7.6) \quad \left(\frac{\partial P(h)}{\partial h} \right)_{h=h_{1,2}}$$

est différente de zéro pour les deux valeurs de h données par (7.4').

La remarque, faite dans le 3ème. paragraphe, reste valable.

Si, dans la fonction $P(h)$, on ne considère pas les termes de degré supérieur à 1, par rapport à c_m , alors, de (7.4'), on obtient pour mh l'expression approximative suivante:

$$(7.7) \quad \sin mh = \frac{2 m H c_m}{a}$$

On calculera ensuite la fonction x_1 donnée par l'équation (7.3).

En utilisant les formules (3.17) et (3.19), la solution générale de l'équation (7.3) est donnée par la relation :

$$x_1 = x_1^* + \alpha_1 u$$

ou

$$(7.8) \quad x_1 = \frac{1}{K} \left\{ u \int_0^t \left[\int_0^t u(a \cos mt - 2H \frac{d\tilde{\xi}^{(m)}}{dt}) dt - \right. \right. \\ \left. \left. -v(a \cos mt - 2H \frac{d\tilde{\xi}^{(m)}}{dt}) - \beta \right] dt + v \left[\int_0^t u(a \cos mt - \right. \right. \\ \left. \left. - 2H \frac{d\tilde{\xi}^{(m)}}{dt}) dt - \beta \right] \right\} + \alpha_1 u$$

où u , v , K , $\frac{d\tilde{\xi}^{(m)}}{dt}$ sont respectivement donnés par les formules (3.20), (3.22), (7.5), la constante β par :

$$(7.9) \quad \beta = -\frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} v(a \cos mt - 2H \frac{d\tilde{\xi}^{(m)}}{dt}) dt + \frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dt \\ \int_0^t u(a \cos mt - 2H \frac{d\tilde{\xi}^{(m)}}{dt}) dt$$

et α_1 est une constante arbitraire qui sera déterminée par la condition de périodicité de la fonction x_2 .

En tenant compte du fait que :

(7.10)

$$\tilde{\xi}^{(m)}(t+h) = A_1 \cos m(t+h) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \cos(2j+1)m(t+h)$$

$$u(t+h) = \frac{\partial \tilde{\xi}^{(m)}}{dt} = -A_1 m \sin m(t+h) - m \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)A_{2j+1}}{\sin(2j+1)m(t+h)}$$

$$v = \frac{1}{Ac_m} B_1 \cos m(t+h) + \frac{1}{Ac_m} \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j+1} \cos(2j+1)m(t+h)$$

[illegible]

en vertu de (7.4'), on aura :

$$\begin{aligned} & \int_0^t u(a \cos mt - 2H \frac{d\tilde{z}^{(m)}}{dt}) dt = -\frac{ma}{2} \int_0^t \sin m(2t+h) dt + \frac{2Hm^2 A_1^2}{2} \int_0^t \cos 2m(t+h) dt \\ & - \frac{ma}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1} \int_0^t \{ \sin m[(2j+2)t + (2j+1)h] + \sin m[2jt + (2j+1)h] \} dt - \\ & - 2Hm^2 A_1 \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1} \int_0^t [-\cos 2m(j+1)(t+h) + \cos 2jm(t+h)] dt + \\ & + Hm^2 \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1)^2 A_{2j+1}^2 \int_0^t \cos 2m(2j+1)(t+h) dt - 2Hm^2 \sum_{j,k=1}^{\infty} (2j+1)(2k+1) A_{2j+1} \\ & \cdot A_{2k+1} \int_0^t \sin(2j+1)m(t+h) \sin(2k+1)m(t+h) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a A_1}{4} [\cos m(2t+h) - \cos mh] + \frac{H_m A_1^2}{2} [\sin 2m(t+h) - \sin 2mh] + \frac{a}{4} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1} \\ & \left\{ \frac{1}{1+j} [\cos m[(j+1)2t + (2j+1)h] - \cos m(2j+1)h] + \frac{1}{j} [\cos m[2jt + (j+1)h] - \cos m(2j+1)h] \right. \\ & \left. - H_m A_1 \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1} \left\{ \frac{1}{j} [\sin 2jm(t+h) - \sin 2jmh] - \frac{1}{j+1} [\sin 2m(j+1)(t+h) - \sin 2m(j+1)h] \right\} \right. \\ & \left. + \frac{H_m}{2} \sum_{j,k=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1}^2 [\sin 2m(2j+1)(t+h) - \sin 2m(2j+1)h] - \frac{H_m}{2} \sum_{\substack{j,k=2 \\ j \neq k}}^{\infty} (2j+1)(2k+1) A_{2j+1} A_{2k+1} \left\{ \frac{1}{j-k} [\sin 2m(j-k)(t+h) - \sin 2m(j-k)h] - \frac{1}{j+k+1} [\sin 2m(j+k+1)(t+h) - \sin 2m(j+k+1)h] \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$(7.12) \int_0^t \int_0^t u(a \cos mt - 2H \frac{d\tilde{z}^{(m)}}{dt}) d\tilde{z}^{(m)} = \frac{a A_1}{8m} [\sin m(2t+h) - \sin mh] - \frac{a A_1}{4} \cos mht$$

$$- \frac{H A_1}{4} [\cos 2m(t+h) - \cos 2mh] - \frac{H m A_1^2}{2} \sin 2mht + \frac{a}{8m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{(j+1)^2} A_{2j+1}$$

$$[\sin m[(2j+1)2t + (2j+1)h] + \sin(2j+1)h] - \frac{a}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j+1} A_{2j+1} \cos m(2j+1)ht +$$

$$\frac{a}{8m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2} A_{2j+1} [\sin m[2jt + (2j+1)h] - \sin m(2j+1)h] - \frac{a}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1}$$

$$\cos m(2j+1)ht + \frac{H A_1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2} A_{2j+1} [\cos 2jm(t+h) - \cos 2jmh] + H m A_1 \cdot$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} \sin 2jmht - \frac{H A_1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{(j+1)^2} A_{2j+1} [\cos 2m(j+1)(t+h) - \cos 2m(j+1)h]$$

$$- H m A_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j+1} A_{2j+1} \sin 2m(j+1)ht - \frac{H}{4} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 [\cos 2m(2j+1)(t+h) - \cos 2m(2j+1)h]$$

$$- \frac{H m}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1}^2 \sin 2m(2j+1)ht + \frac{H}{4} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{(j-k)^2} A_{2j+1} A_{2k+1} [\cos 2m(j-k)(t+h)]$$

$$- \cos 2m(j-k)h] + \frac{H m}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{(j-k)} A_{2j+1} A_{2k+1} \sin 2m(j-k)ht - \frac{H}{4} \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{(j+k+1)^2}$$

$$A_{2j+1} A_{2k+1} [\cos 2m(j+k+1)(t+h) - \cos 2m(j+k+1)h] - \frac{H m}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j+k+1 \neq h}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{j+k+1} A_{2j+1} A_{2k+1}$$

$$(7.13) \int_0^t v(a \cos mt - 2H \frac{d\tilde{z}^{(m)}}{dt}) dt = \frac{a B_1}{m A C_m} [\sin m(2t+h) - \sin mh] - \frac{a B_1}{2 A C_m} \cos mht + \frac{H A B_1}{2 A C_m} [\cos 2m(t+h) - \cos 2mh] + \frac{4 B_1}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j+1}$$

$$A_{2j+1} [\cos 2m(j+1)(t+h) - \cos 2m(j+1)h] + \frac{H B_1}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} [\cos 2jm(t+h) - \cos 2jmh] - \frac{a}{4 m A C_m}$$

$$\frac{B_{2j+1}}{j+1} [\sin m[2(j+1)t + (2j+1)h] - \sin(2j+1)mh] - \frac{a}{4 m A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{j} \left\{ \sin m[2jt + (2j+1)h] - \right.$$

$$\sin m(2j+1)h \left. \right\} + \frac{H A_1}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{j+1} [\cos 2m(j+1)(t+h) - \cos 2m(j+1)h] - \frac{H A_1}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{j} [\cos 2jm(t+h) -$$

$$\cos 2jmh] + \frac{H}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} B_{2j+1} [\cos 2(2j+1)m(t+h) - \cos 2(2j+1)mh] + \frac{H}{2 A C_m}$$

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j+k+1 \neq h}}^{\infty} \frac{2j+1}{j+k+1} A_{2j+1} B_{2j+1} [\cos 2(j+k+1)m(t+h) - \cos 2(j+k+1)mh]$$

$$+ \frac{H}{2 A C_m} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{2j+1}{j-k} A_{2j+1} B_{2j+1} [\cos (j-k)2m(t+h) - \cos (j-k)2mh]$$

Pour le calcul de β , compte tenu des formules (7.9), (7.12) et (7.13), on trouve :

(7.14):

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{-a B_1}{2 A e m} \cos m h - \frac{a A_1}{4} \cos m h - \frac{H m A_1^2}{2} \sin 2 m h - \frac{a}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} \cos(2j+1) h - \\ & - \frac{a}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} \cos m(2j+1) h + H m A_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} \sin 2 m j h \\ & - H m A_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j+1} A_{2j+1} \sin 2 m(j+1) h - \frac{H m}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1}^2 \sin 2 m(2j+1) h \\ & + \frac{H m}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{j-k} A_{2j+1} A_{2k+1} \sin 2 m(j-k) h - \\ & - \frac{H m}{2} \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{j+k+1} A_{2j+1} A_{2k+1} \cdot \\ & \cdot \sin 2 m(j+k+1) h. \end{aligned}$$

En vertu des résultats trouvés, la formule (7.8) devient :

$$\begin{aligned} (7.14') K x_1 = & - \left[A_1 \sin m(t+h) + \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1} \sin(2j+1) m(t+h) \right] \left\{ \frac{a A_1}{8 m} \cdot \right. \\ & \left[\sin m(2t+h) - \sin m h \right] - \frac{H A_1^2}{4} \left[\cos 2 m(t+h) - \cos 2 m h \right] + \frac{a}{8 m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{(j+1)^2} \cdot \\ & A_{2j+1} \left[\sin m[(2j+2)t + (2j+4)h] - \sin m(2j+4) h \right] + \frac{a}{8 m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2} A_{2j+1} \cdot \\ & \left[\sin m[2j t + (2j+1)h] - \sin m(2j+1) h \right] + \frac{H A_1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j^2} A_{2j+1} \left[\cos 2j m(t+h) - \right. \\ & \left. - \cos 2j m h \right] - \frac{H A_1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{(j+1)^2} A_{2j+1} \left[\cos 2 m(j+1)(t+h) - \cos 2 m(j+1) h \right] \\ & - \frac{H}{4} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 \left[\cos 2 m(2j+1)(t+h) - \cos 2 m(2j+1) h \right] + \frac{H}{4} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{(j-k)^2} \cdot \\ & A_{2j+1} A_{2k+1} \left[\cos 2 m(j-k)(t+h) - \cos 2 m(j-k) h \right] - \\ & - \frac{H}{4} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{(j+k+1)^2} A_{2j+1} A_{2k+1} \left[\cos 2 m(j+k+1)(t+h) - \cos 2 m \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (j+k+1)h] - \frac{a B_1}{4m A C_m} \left[\sin m(2t+h) - \sin m h \right] + \frac{H A_1 B_1}{2 A C_m} \left[\cos 2m(t+h) - \cos 2m h \right] + \frac{H B_1}{2 A C_m} \cdot \\
 & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j+1} A_{2j+1} \left[\cos 2m(j+1)(t+h) - \cos 2m(j+1)h \right] + \frac{H B_1}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} \left[\cos 2jm \cdot \right. \\
 & \left. t+h - \cos 2jm h \right] - \frac{a}{4m A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{j+1} \left[\sin m[(2j+1)h + 2(j+1)t] - \sin (2j+1)m h \right] - \\
 & \frac{a}{4m A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{j} \left[\sin m[2jt + (2j+1)h] - \sin m(2j+1)h \right] + \frac{H A_1}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{j+1} \cdot \\
 & \left[\cos 2m(j+1)(t+h) - \cos 2m(j+1)h \right] - \frac{H A_1}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{j} \left[\cos 2jm(t+h) - \cos 2mj h \right] + \\
 & \frac{H}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} B_{2j+1} \left[\cos 2m(2j+1)(t+h) - \cos 2m(2j+1)h \right] + \frac{H}{2 A C_m} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{2j+1}{j+k+1} \cdot \\
 & A_{2j+1} B_{2k+1} \left[\cos 2(j+k+1)m(t+h) - \cos 2(j+k+1)m h \right] + \frac{H}{2 A C_m} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{2j+1}{j-k} \cdot \\
 & A_{2j+1} B_{2k+1} \left[\cos (j-k)2m(t+h) - \cos (j-k)2m h \right] \left\} + \frac{1}{A C_m} \left[B_1 \cos m(t+h) + \right. \\
 & \left. \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j+1} \cos (2j+1)m(t+h) \right] \left\} \frac{a A_1}{4} \cos m(2t+h) + \frac{H m A_1^2}{2} \sin 2m(t+h) + \frac{a}{4} \cdot \\
 & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j+1} A_{2j+1} \cos m[(j+1)2t + (2j+1)h] + \frac{a}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} \cos m[2jt + (2j+1)h] - H m A_1 \cdot \\
 & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} A_{2j+1} \sin 2jm(t+h) + H m A_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j+1} A_{2j+1} \sin 2m(j+1)(t+h) + \frac{H m}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1}^2 \sin 2m(2j+1) \cdot \\
 & (t+h) - \frac{H m}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{j-k} A_{2j+1} A_{2k+1} \sin 2m(j-k)(t+h) + \frac{H m}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(2j+1)(2k+1)}{j+k+1} A_{2j+1} A_{2k+1} \\
 & \left. \sin 2m(j+k+1)(t+h) + \frac{a B_1}{2 A C_m} \cos m h \right\} + a u
 \end{aligned}$$

En se bornant aux termes de degré non supérieur au premier ordre par rapport à c_m , on obtient :

$$\begin{aligned}
 K x_1 &= \frac{a A_1 B_1}{4 A C_m} \left\{ \sin m(t+h) [\sin m(2t+h) - \sin mh] + \cos m(t+h) \cos m(2t+h) \right\} + \\
 &+ \frac{m H A_1^2 B_1}{2 A C_m} \left\{ -\sin m(t+h) [\cos 2m(t+h) - \cos 2mh] + \cos m(t+h) \sin 2m(t+h) \right\} + \\
 &+ \frac{a B_1^2}{2 A^2 C_m^2} \cos mh \cos m(t+h) + \frac{a B_1 B_3}{2 A^2 C_m^2} \cos mh \cos 3m(t+h) + du = \\
 &= \frac{a B_1 A_1}{4 A C_m} [\cos mt - \sin mh \sin m(t+h)] + \frac{m H A_1^2 B_1}{2 A C_m} [\sin m(t+h) + \\
 &\cos 2mh \cdot \sin m(t+h)] + \frac{a B_1^2}{2 A^2 C_m^2} \cos mh \cos m(t+h) + \frac{a B_1 B_3}{2 A^2 C_m^2} \\
 &\cdot \cos mh \cos 3m(t+h) + du
 \end{aligned}$$

D'après (7.10) et (7.7), $\cos 2mh \approx 1$, et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 (7.15) \quad x_1 &= \frac{a \cos mh}{2 K A^2 c_m^2} \left(1 + \frac{6 \gamma}{32 k^2} c_m^2 \right) \cos m(t+h) + \frac{m H c_m}{2 K A} \sin m(t+h) + \\
 &+ \frac{a}{4 K A} \cos mt - \frac{3 a \gamma}{32 k^2} \frac{1}{2 A^2 K} \cos mh \cdot \cos 3m(t+h) + \alpha_1 u = \\
 &= x_1^* + \alpha_1 u .
 \end{aligned}$$

On détermine la constante α_1 de la condition de périodicité de la fonction x_2 .

Déquation différentielle de x_2 est :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + (k^2 - 3 \gamma \xi^{(m)^2}) x_2 = 3 \gamma \xi^{(m)} x_1^2 - 2 H \frac{dx_1}{dt}$$

La condition de périodicité, d'après (3.15), conduit à la relation :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} (3 \gamma \xi^{(m)} x_1^2 - 2 H \frac{dx_1}{dt}) u dt = 0, \text{ ou, en égard à (7.15):}$$

$x_1 = x_1^* + \alpha_1 u$, on aura :

$$6 \gamma \alpha_1 \int_0^{\frac{2\pi}{m}} x_1^* \xi^{(m)} u^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left[2H \frac{dx_1^*}{dt} - 3\gamma \xi^{(m)} x_1^{*2} \right] u dt +$$

$$+ 2\alpha_1 H \int_0^{\frac{2\pi}{m}} u \frac{du}{dt} dt - 3\gamma \alpha_1^2 \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} u^3 dt$$

On remarque facilement, en tenant compte des formules (7.10), que :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} u \frac{du}{dt} dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \xi^{(m)} u^3 dt = 0$$

Alors α_1 sera donnée par la relation :

$$(7.16) \quad \alpha_1 = \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left[2H \frac{dx_1^*}{dt} - 3\gamma \xi^{(m)} x_1^{*2} \right] u dt}{6\gamma \int_0^{\frac{2\pi}{m}} x_1^* \xi^{(m)} u^2 dt}$$

cù $\int_0^{\frac{2\pi}{m}} x_1^* \xi^{(m)} u^2 dt$, étant proportionnelle à $\left(\frac{\partial P(h)}{\partial h} \right)_{h=h_{sol}}$

diffère de zéro (Voir aussi par. 3),

Dans les calculs ultérieurs, on se bornera seulement aux puissances inférieures de c_m , tant pour les fonctions x_1 , $\dot{x}_1$ que pour $\xi^{(m)}$ et u .

On considère donc :

$$x_1^* = \frac{a \cos mh}{2 K A^2 c_m^2} \cos m(t+h) + \frac{3\gamma a \cos mh}{32 k^2 K A^2} \cos m(t+h) + \frac{a}{4 K A} \cos mt -$$

$$- \frac{3\gamma a \cos mh}{32 k^2 K A^2} \cos 3m(t+h)$$

$$\dot{x}_1^* = - \frac{a m \cos mh}{2 K A^2 c_m^2} \sin m(t+h) - \frac{3\gamma a m \cos mh}{32 k^2 K A^2} \sin m(t+h) -$$

$$- \frac{a m}{4 K A} \sin mt + \frac{3\gamma a m \cos mh}{32 k^2 K A^2} \sin 3m(t+h)$$

$$\xi^{(m)} = c_m \cos m(t+h) ; u = -m c_m \left[\left(1 + \frac{\gamma c_m^2}{32 k^2} \right) \sin m(t+h) - \frac{3 \gamma}{32 k^2} c_m^2 \sin 3 m(t+h) \right]$$

Alors :

$$a) \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left[2H \frac{dx_1}{dt} - 3 \gamma \xi^{(m)} x_1^{*2} \right] u dt = c_m \frac{a m \pi \cos mh}{4 K A^2}.$$

$$(7.17) \quad \left\{ 4 AH \left(\frac{1}{A c_m^2} + \frac{7 \gamma}{32 k^2 A} + \frac{1}{2} \right) + \frac{3 \gamma a}{4 m K A c_m} \sin 3mh \right\}$$

$$b) 6 \gamma \int_0^{\frac{2\pi}{m}} x_1^* \xi^{(m)} u^2 dt = \frac{6 \gamma m^2 c_m^3 a \cos mh}{2 K A^2 c_m^2}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sin^2 m(t+h) \cos^2 m(t+h) dt = \frac{3 \gamma a m \pi \cos mh}{4 K A^2} c_m$$

Par suite, de (7.16) et (7.17), on trouve :

$$\alpha_1 = \frac{4 A H}{3 \gamma} \left[\frac{1}{A c_m^2} + \frac{7 \gamma}{32 k^2 A} + \frac{1}{2} \right] + \frac{a \sin 3mh}{4 m K A c_m} = \frac{4 H}{3 \gamma c_m^2} + \frac{4 A H}{3 \gamma} \left[\frac{7 \gamma}{32 k^2 A} + \frac{1}{2} \right] + \frac{a \sin 3 mh}{4 m K A c_m}$$

En tenant compte du fait que

$$\sin 3 mh = 3 \sin mh - 4 \sin^3 mh \quad \text{et} \quad \sin mh = \frac{2 m H c_m}{a}$$

et par suite $\sin 3 mh \approx \frac{6 mh}{a} c_m$, on trouve :

$$(7.18) \quad \alpha_1 = \frac{4 H}{3 \gamma c_m^2} + \frac{7 H}{24 k^2} + \frac{2 A H}{3} + \frac{3 H}{2 k A}$$

Les formules (7.10), (2.6), (3.21), (3.22), (7.2), (7.7), (7.15), et (7.8) donnent la solution $\{x^{(m)}\}$ en présence de la force de résistance.

VIII - SOLUTION PERIODIQUE $x^{(0)}$

Considérons le système :

$$(8.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt - 2 H \frac{dx}{dt}),$$

ayant l'équation génératrice :

$$(8.2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = 0,$$

qui admet la solution triviale

$$(8.3) \quad x = 0$$

qui peut être considérée comme solution périodique de période $\frac{2\pi}{m}$.

On pose le problème de trouver une solution périodique $\{x^{(c)}\}$ qui se réduise, pour $\mu = 0$, à la solution génératrice triviale (8.3).

Etant donné que, dans le cas où $k \neq p$ (où p est un entier), les conditions du théorème général de POINCARÉ (Voir par. 4) sont remplies. Il en résulte que l'équation (8.1) admet, pour μ assez petit, une solution périodique unique, analytique par rapport à μ , qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution triviale isolée : $x = 0$.

On cherche la solution désirée sous forme de la série:

$$(8.4) \quad x^{(c)} = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

où les coefficients sont des fonctions périodiques.

En procédant comme dans le 4ème. paragraphe, on obtiendra de proche en proche tous les coefficients $x_i(t)$. L'équation

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2 x_1 = a \cos mt$$

donne le coefficient périodique x_1 :

$$(8.5) \quad x_1 = \frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt.$$

Ensuite :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + k^2 x_2 = -2 H \frac{dx_1}{dt} = \frac{2 a H m}{k^2 - m^2} \sin mt$$

donne :

$$x_2 = \frac{2 H a m}{k^2 - m^2)^2} \sin mt \quad \text{et}$$

(8.6)

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + k^2 x_3 = \gamma x_1^3 - 2H \frac{dx_2}{dt} = \frac{a}{(k^2 - m^2)^2} \left[\frac{3 \gamma a^2}{4(k^2 - m^2)} - 4 H^2 m^2 \right] \cos mt + \frac{\gamma a^3 \cos 3 mt}{4 (k^2 - m^2)^3}$$

donne

$$x_3 = \frac{a}{(k^2 - m^2)^3} \left[-4 H^2 m^2 + \frac{3 \gamma a^2}{4(k^2 - m^2)} \right] \cos mt + \frac{\gamma a^3}{4(k^2 - m^2)^3 (k^2 - 9m^2)} \cos 3 mt$$

En conclusion, on aura la solution suivante :

$$(8.7) \quad x^{(0)} = \mu \frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt + \mu^2 \frac{2 a m H}{(k^2 - m^2)^2} \sin mt + \\ + \mu^3 \left\{ \frac{a}{(k^2 - m^2)^3} \left[\frac{3 \gamma a^2}{4 k^2 - m^2} - 4 H^2 m^2 \right] \cos mt + \right. \\ \left. + \frac{\gamma a^3 \cos 3 mt}{4(k^2 - m^2)^3 (k^2 - 9m^2)} \right\} + \dots$$

IX - SOLUTION PERIODIQUE A LA RESONANCE $x^{(rés)}$.

Pour trouver les vibrations du système (8.1) dans le voisinage de $k = m$, on pose :

$$m^2 - k^2 = \mu \lambda$$

et par suite l'équation (8.1) devient :

$$(9.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + m^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt - 2 H \frac{dx}{dt} + \lambda x)$$

Etant donné que toutes les conditions du théorème de MILKIN, (exposées au par. 5) sont remplies, on cherchera la solution périodique à la résonance (pour (9.1)), sous forme de la série :

$$(9.2) \quad x^{(rés)} = x_1 \mu^{\frac{1}{3}} + x_2 \mu^{\frac{2}{3}} + x_3 \mu + \dots$$

qui satisfait formellement l'équation (9.1). Les coefficients x_j sont certaines fonctions périodiques qui se trouvent à partir des équations différentielles obtenues en faisant dans l'équation (9.1) la substitution (5.5) et en égalant ensuite les coefficients pour les mêmes puissances de :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + m^2 x_1 = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + m^2 x_2 = 0$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + m^2 x_3 = \gamma x_1^3 + a \cos mt$$

(9.3)

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} + m^2 x_4 = 3 \gamma x_1^2 x_2 - 2 H \frac{dx_1}{dt} + \lambda x_1$$

$$\frac{d^2 x_5}{dt^2} + m^2 x_5 = 3 \gamma x_1^2 x_3 + 3 \gamma x_1 x_2^2 - 2 H \frac{dx_2}{dt} + \lambda x_2$$

.....

De là, on trouve :

$$(9.4) \quad \begin{cases} x_1 = A_1 \cos m t + B_1 \sin m t \\ x_2 = A_2 \cos m t + B_2 \sin m t \end{cases}$$

où A_1 , B_1 , A_2 , B_2 sont certaines constantes arbitraires, qui seront déterminées par les conditions de périodicité des fonctions x_3 et x_4 .

Compte tenu de (9.4), l'équation différentielle qui détermine x_3 devient (Voir (9.3)) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + m^2 x_3 &= \gamma (A_1 \cos mt + B_1 \sin mt)^3 + a \cos mt = \\ &= \frac{\gamma}{4} \left\{ \left[3 A_1^3 + 3 A_1 B_1^2 + \frac{4 a}{\gamma} \right] \cos mt + \right. \\ &\quad + 3 (B_1^2 + A_1^2 B_1) \sin mt + (A_1^3 - 3 A_1 B_1^2) \cos 3 mt + \\ &\quad \left. + (3 A_1^2 B_1 - B_1^3) \sin 3 mt \right\} . \end{aligned}$$

La condition de périodicité de la fonction x_3 donne

$$(9.5) \quad \begin{cases} A_1 (A_1^2 + B_1^2) = -\frac{4a}{3\delta} \longrightarrow A_1 = -\sqrt[3]{\frac{4a}{3\delta}} \\ B_1 (A_1^2 + B_1^2) = 0 \qquad B_1 = 0 \end{cases}$$

La fonction x_3 sera :

$$(9.6) \quad x_3 = \frac{a}{24m^2} \cos 3mt + A_3 \cos mt + B_3 \sin mt$$

Ensuite, pour x_4 , on a l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_4}{dt^2} + m^2 x_4 = & \left[\frac{9\delta}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} A_2 - \lambda \sqrt[3]{\frac{4a}{3\delta}} \right] \cos mt + \\ & + \left[\frac{3\delta}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} B_2 - 2Hm \sqrt[3]{\frac{4a}{3\delta}} \right] \sin mt + \\ & + \frac{3\delta}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} \left[A_2 \cos 3mt + B_2 \sin 3mt \right] \end{aligned}$$

d'où on trouve :

$$(9.7) \quad \begin{aligned} A_2 = \frac{4\lambda}{9\delta} \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}}, \quad B_2 = \frac{8Hm}{3\delta} \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \\ x_4 = \frac{\lambda}{16} \sqrt[3]{\frac{4a}{3\delta}} \cos 3mt - \frac{Hm}{4} \sqrt[3]{\frac{4a}{3\delta}} \sin 3mt + \\ + A_4 \cos mt + B_4 \sin mt \end{aligned}$$

La condition de la périodicité de la fonction x_5 , définie par l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_5}{dt^2} + m^2 x_5 = & \left[\frac{3\delta}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} \left(3A_3 + \frac{a}{24m^2} \right) - \frac{32H^2m^2}{3\delta} \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \right] \cos mt + \\ & + \left[\frac{3\delta}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} B_3 + \frac{16}{9\delta} \lambda Hm \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \right] \sin mt + \\ & + \left[\frac{3\delta}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} \left(-\frac{a}{12m^2} + A_3 \right) - \frac{4}{3\delta} \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \left(\frac{\lambda^2}{9} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4H^2m^2 \right) \right] \cos 3mt + \left[\frac{3\delta}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} B_3 - \right. \\ & \left. - \frac{16}{9\delta} \lambda Hm \sqrt[3]{\frac{3\delta}{4a}} \right] \sin 3mt + \frac{\delta a}{32m^2} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\delta}\right)^2} \cos 5mt, \end{aligned}$$

donne :

$$(9.8) \quad A_3 = -\frac{a}{72 m^2} + \frac{32 H^2 m^2}{9 \gamma a} ; \quad B_3 = -\frac{16 \lambda H m}{9 \gamma a}$$

Après tout, la solution périodique à la résonance sera :

$$(9.10) \quad x^{(rés)} = -\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}} \mu^{\frac{1}{3}} \cos mt + \mu^{\frac{2}{3}} \left[\frac{4\lambda}{9\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \cos mt + \right. \\ \left. + \frac{8 H m}{3 \gamma} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \sin mt \right] + \mu \left\{ \left[-\frac{a}{72 m^2} + \frac{32 H^2 m^2}{9 \gamma a} \right] \cos mt - \right. \\ \left. - \frac{16 \lambda H m}{9 \gamma a} \sin mt + \frac{a}{24 m^2} \cos 3mt \right\} + \mu^{\frac{4}{3}} x_4 + \dots$$

X - STABILITE DES SOLUTIONS PERIODIQUES ETUDIEES DANS LES PARAGRAPHEs 7, 8 et 9.

On étudiera dans ce qui suit la stabilité des solutions périodiques de l'équation :

$$(10.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt - 2 H \frac{dx}{dt})$$

pour les 3 cas étudiés dans les paragraphes 7, 8 et 9.

I) On résoudra, au commencement, le problème de stabilité de la solution $\{x^{(m)}\}$ donnée par les formules (7.2), (7.10), (2.6), (3.21), (3.22), (7.1), (7.15) et (7.8). Conformément à la première partie du 6ème. paragraphe, les conditions de stabilité de la solution $\{x^{(m)}\}$ sont données par les inégalités :

$$K \frac{d P(h)}{dh} \leq 0$$

$$(10.2) \quad \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dt \leq 0$$

$$\text{où } f = a \cos mt - 2 H \frac{dx}{dt} .$$

La première de ces conditions, en vertu de (3.22) et (7.4"), devient :

$$K \frac{dP(h)}{dh} = \frac{a k \pi \cos mh}{(2 h_2 + 4 h_4 c_m^2)} (k^2 - \gamma c_m^2) \left(1 + \frac{\gamma}{32 k^2} c_m^2 + \dots\right) c_m$$

ce qui montre qu'elle est remplie, pour c_m suffisamment petit, avec le signe d'inégalité si $c_m < 0$ et n'est pas remplie si $c_m > 0$.

En tenant compte de l'expression de f , la deuxième condition devient :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{m}} (-2H) dt = -2H \frac{2\pi}{m} < 0 \quad (H > 0)$$

c'est-à-dire cette condition est satisfaite avec le signe d'inégalité (stricte).

Par conséquent, la solution $\{x^{(m)}\}$ qui correspond à $c_m < 0$ est asymptotiquement stable et la solution qui correspond à $c_m > 0$ est instable.

II) Pour l'étude de la stabilité de la solution $x^{(0)}$, donnée par (8.7), on formera l'équation correspondante aux variations. Dans ce but, on fait, dans l'équation (10.1) la substitution :

$$x = x^0 + y = \mu \frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt + \mu^2 \frac{2 a m H}{(k^2 - m^2)^2} \sin mt + \\ + \mu^3 \left\{ \frac{a}{k^2 - m^2} \left[\frac{3 \gamma a^2}{4(k^2 - m^2)} - 4 H^2 m^2 \right] \cos mt + \right. \\ \left. + \frac{\gamma a^3 \cos 3 mt}{4(k^2 - m^2)(k^2 - 9 m^2)} \right\} + \dots + y$$

On obtient l'équation aux variations :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y + 2H \mu \frac{dy}{dt} + \mu^2 \dots = 0$$

où les termes non écrits sont de degré supérieur à 1, par rapport à μ .

Par conséquent, les exposants caractéristiques de la solution $x^{(0)}$ (8.7) sont déterminés par la formule :

$$(10.3) \quad \alpha_{1,2} = \pm i k - H \mu + \dots$$

Il s'ensuit que, pour μ suffisamment petit, la solution $\{x^{(0)}\}$ est asymptotiquement stable.

III) La solution périodique $\{x^{(rés)}\}$ de l'équation (10.1) à la résonance, donnée par la relation (9.10) est aussi asymptotiquement stable car, pour elle, la condition de stabilité :

$$(10.4) \quad \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right) dt = \int_0^{2\pi} (-2H) dt =$$

$$= -2H2\pi < 0$$

En comparant les résultats du 6ème. et du 10ème. paragraphe, en ce qui concerne la stabilité des solutions périodiques de diverses nuances, on remarque que les solutions périodiques de l'équation (10.1) sont toutes asymptotiquement stables, tandis que les solutions de l'équation (6.1) sont quasi-stables (à l'exception de la solution $\{x^{(m)}\}$ pour $c_m > 0$, qui est instable pour les deux équations).

XI - PROBLEME DE DUFFING EN PRESENCE D'UNE FORCE EXCITATRICE A DEUX HARMONIQUES [67].

On étudiera, dans ce qui suit, le problème de DUFFING en présence d'une force de résistance linéaire et d'une force excitatrice qui contient deux harmoniques.

En d'autres termes, on étudiera les vibrations forcées du système décrit par l'équation :

$$(11.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos nt + b \cos nt - 2H \frac{dx}{dt})$$

$$(a > 0, \quad b > 0, \quad H > 0, \quad \gamma > 0)$$

où m et n sont des entiers. Ce cas représente une généralisation tant du cas étudié dans les paragraphes 3, 4, 5 et 6, que du cas étudié dans les paragraphes 7, 8, 9 et 10, où l'on considèrait l'amortissement et où la force excitatrice contenait une seule harmonique. Le cas général de l'équation (11.1) sera traité en considérant l'équation (11.1) comme un système approché du système de LIAPOUNOFF. On cherchera, pour l'équation (11.1) tant les solutions $\{x^{(m)}\}$ et $\{x^{(n)}\}$, la solution $\{x^{(0)}\}$, la solution de résonance, que la stabilité de ces solutions et le caractère du développement des vibrations ainsi générées.

On commencera l'étude des solutions $\{x^{(m)}\}$. On

remarque tout d'abord que la solution $x^{(n)}$ s'obtient par une simple permutation des nombres m et n .

A) Solution $\{x^{(m)}\}$:

On pose le problème de trouver la solution périodique de l'équation (11.1), qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution génératrice $\xi^{(m)}(t+h)$ donnée par les formules (2.5), (2.6), et (2.7). On désignera la solution cherchée par $\{x^{(m)}\}$.

En utilisant les résultats des paragraphes 3 et 7, on cherchera la solution périodique de l'équation (11.1) sous forme de la série :

$$(11.2) \quad x^{(m)} = \xi^{(m)}(t+h) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots$$

où $x_k(t)$ sont certaines fonctions périodiques ayant la période $\frac{2\pi}{m}$, pas encore déterminées.

Pour les déterminer, on remplace, dans l'équation (11.1) la série $x^{(m)}$ et, en égalant les coefficients des mêmes puissances de μ , on obtient les équations différentielles correspondantes, qui doivent être vérifiées par $x_m(t)$. Ainsi, par exemple, pour la fonction x_1 , on obtient l'équation :

$$(11.3) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k^2 - 3 \gamma \xi^{(m)^2}) x_1 = a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d \xi^{(m)}}{dt}$$

Pour que cette équation admette une solution périodique de période 2π , il faut et il suffit que h satisfasse à la condition (3.18) (Voir (3.16)), c'est-à-dire :

$$(11.4) \quad P(h) = \int_0^{2\pi} \left[a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d \xi^{(m)}(t+h)}{dt} \right] \frac{d \xi^{(m)}(t+h)}{dt} dt = 0$$

Compte tenu du fait que (Voir aussi (7.5)) :

$$(11.4') \quad \begin{aligned} \xi^{(m)}(t+h) &= A_1 \cos m(t+h) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \cos(2j+1)m(t+h) \\ u(t+h) &= \frac{d \xi^{(m)}}{dt} = -A_1 m \sin m(t+h) - m \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \sin \left[(2j+1)m(t+h) \right] \cdot (2j+1) \end{aligned}$$

où
$$A_1 = c_m + \frac{1}{32} \frac{\delta}{k^2} c_m^3 + \dots$$

$$A_3 = - \frac{1}{32} \frac{\delta}{k^2} c_m^3 + \dots$$

.....

on aura (Voir (7.4")) :

$$(11.5) \quad P(h) = - a m A_1 \pi \sin mh - 2 H A_1^2 m^2 \pi - 2 \pi H m^2$$

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right] - \frac{m b A_1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sin [(m+n)t + \right.$$

$$+mh] + \sin [(m-n)t + mh] \Big\} dt - \frac{m b}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} (2j+1) \cdot$$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \sin [(2j+1)m+n)t + (2j+1)mh] + \sin [(2j+1)m-n)t + \right.$$

$$\left. + (2j+1)mh] \right\} dt = 0$$

Pour déterminer h , de (11.5) on trouve les équations suivantes :

(11.6)

$$P(h) = - m a A_1 \sin mh - 2 H A_1^2 m^2 \pi - 2 \pi H m^2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right] = 0$$

si $\frac{n}{m} \neq 2j+1 \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$

$$P(h) = - m a A_1 \pi \sin mh - 2 H A_1^2 m^2 \pi - 2 \pi H m^2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right] -$$

$$- m b \pi \left[A_{2j+1} (2j+1) \sin(2j+1)mh \right] = 0 \quad \text{si } \frac{n}{m} = 2j+1$$

où j peut être égal à 1, 2, 3, ..., c'est-à-dire si le rapport $\frac{n}{m}$ est un entier impair (considéré ici positif ou négatif).

Dans l'hypothèse où le rapport $\frac{n}{m}$ n'est pas un entier impair, la première équation (10.6) détermine deux valeurs pour l'angle mh , dont la somme est égale à π . La quantité $\left(\frac{dP(h)}{dh} \right)_{h=h_{scl}}$ pour ces valeurs de h diffère de zéro.

Compte tenu du fait qu'on a deux valeurs distinctes pour c_m , égales en valeur absolue et de signes opposés, il paraîtrait qu'il y a quatre solutions périodiques de la forme $\{x^{(m)}\}$.

Mais, en réalité, il n'y a que deux solutions différentes de la forme $\{x^{(m)}\}$. En effet, étant donné que la fonction $\xi^{(m)}(t+h)$ contient seulement les puissances impaires de c_m et seulement les multiples impairs de l'angle $m(t+h)$, alors en remplaçant $m h$ par $\pi - m h$, on remarque que la solution génératrice $\{\xi^{(m)}(t+h)\}$, qui correspond à une valeur de c_m donnée, passe dans la solution $\{\xi^{(m)}(t+h)\}$, qui correspond à la valeur de c_m de signe opposé. On peut supposer donc que l'angle $m h$ est aigu.

Dans ce cas, en première approximation, c'est-à-dire si dans la fonction $P(h)$ on garde seulement les termes du premier degré par rapport à c_m , on obtient, pour $m h$, la formule suivante :

$$(11.6) \quad \sin m h = \frac{2 m H c_{11}}{a}$$

Compte tenu de la deuxième équation (10.6) et de (11.4), nous concluons que la formule approximative (11.6) reste aussi valable dans le cas où le rapport $\frac{n}{m}$ est un entier impair (bien entendu différent de 1).

On calculera ensuite la fonction x_1 , qui vérifie l'équation (11.3). D'après les formules (3.17), (3.18) et (3.19), la solution générale de l'équation (11.3) est donnée par la relation :

$$(11.7) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1^* + \alpha_1 u && \text{ou} \\ x_1 &= \frac{1}{K} \left\{ u \int_0^t \left[u(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d\xi^{(m)}}{dt}) dt \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - v(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d\xi^{(m)}}{dt}) \beta \right] dt + \right. \\ &\quad \left. + v \left[\int_0^t u(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d\xi^{(m)}}{dt}) dt - \beta \right] + \alpha_1 u \right\} \end{aligned}$$

où $\xi^{(m)}$, u , v , K , sont respectivement données par les formules (7.10) et (3.22), la constante β par :

$$(11.8) \quad \beta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d\zeta^{(m)}}{dt}) dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^t u(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d\zeta^{(m)}}{dt}) dt,$$

h est donné par (10.6) et α_1 est une constante arbitraire qui sera déterminée par la condition de périodicité de la fonction x_2 .

Pour les calculs ultérieurs, on utilisera les résultats donnés par les formules (7.10, 7.15). Pour simplifier l'écriture on représentera les intégrales par leur numéro de référence. Par conséquent :

$$(11.9) \quad \int_0^t u(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d\zeta^{(m)}}{dt}) dt = (7.11) + b \int_0^t u \cos nt dt = \\ = (7.11) + \frac{mbA_1}{2(m+n)} \left\{ \cos[(m+n)t + mh] - \cos mh \right\} + \frac{mbA_1}{2(m-n)} \left\{ \cos[(m-n)t + mh] - \cos mh \right\} \\ + \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{2j+1}{(2j+1)m+n} \left\{ \cos[(2j+1)m+n)t + (2j+1)mh] - \cos(2j+1)mh \right\} \\ + \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{2j+1}{(2j+1)m-n} \left\{ \cos[(2j+1)m-n)t + (2j+1)mh] - \cos(2j+1)mh \right\}$$

$$(11.10) \quad \int_0^t \left[\int_0^t u(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d\zeta^{(m)}}{dt}) dt \right] dt = (7.12) +$$

$$\frac{mbA_1}{2(m+n)^2} \left\{ \sin[(m+n)t + mh] - \sin mh \right\} - \frac{mbA_1}{2(m-n)} \cos mh t + \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \cdot \\ \frac{2j+1}{[(2j+1)m+n]^2} \left\{ \sin[(2j+1)m+n)t + (2j+1)mh] - \sin(2j+1)mh \right\} - \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \cdot \\ \frac{(2j+1)}{(2j+1)m+n} \cos(2j+1)mh \cdot t + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{(2j+1)mb}{2[(2j+1)m-n]^2} \left\{ \sin[(2j+1)m-n)t + (2j+1)mh] \right. \\ \left. - \sin(2j+1)mh \right\} - \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{(2j+1)m-n} \cos(2j+1)mh \cdot t - \frac{mbA_1}{2(m+n)} t \cos mh \\ + \frac{mbA_1}{2(m-n)^2} \left\{ \sin[(m-n)t + mh] - \sin mh \right\}$$

$$\begin{aligned}
 (11.11) \quad & - \int_0^t n \left(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{d^3(m)}{dt^3} \right) dt = (7.13) - b \int_0^t n \cos nt \, dt = \\
 & = (7.13) - \frac{b B_1}{2 A C_m (m+n)} \left\{ \sin[(m+n)t + mh] - \sin mh \right\} - \frac{b B_1}{2 A C_m (m-n)} \left\{ \sin[(m-n)t + \right. \\
 & \left. mh] - \sin mh \right\} - \frac{b}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{(2j+1)^{m+n}} \left\{ \sin[(2j+1)m+n)t + (2j+1)mh] - \right. \\
 & \left. \sin(2j+1)mh \right\} - \frac{b}{2 A C_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{(2j+1)^{m-n}} \left\{ \sin[(2j+1)m-n)t + (2j+1)mh] \right. \\
 & \left. - \sin(2j+1)mh \right\}
 \end{aligned}$$

Pour β , en vertu de (11.8), (11.10) et (11.11), on trouve :

$$\begin{aligned}
 (11.12) \quad \beta = (7.14) - \frac{mb A_1}{2(m+n)} \cos mh - \frac{mb A_1}{2(m-n)} \cos mh - \frac{mh}{2} \sum A_{2j+1} \cdot \\
 \frac{2j+1}{(2j+1)^{m-n}} \cos(2j+1)mh - \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{2j+1}{(2j+1)^{m+n}} \cos(2j+1)mh
 \end{aligned}$$

En vertu des résultats trouvés, la formule (11.7) devient :

$$\begin{aligned}
 (11.13) \quad K x_1 = (7.14)' - m \left[A_1 \sin m(t+h) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} (2j+1) \sin(2j+1)m(t+h) \right] \\
 \left[\frac{mb A_1}{2(m+n)^2} \left\{ \sin[(m+n)t + mh] - \sin mh \right\} + \frac{mb A_1}{2(m-n)^2} \left\{ \sin[(m-n)t + mh] - \sin mh \right\} \right] \\
 + \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{2j+1}{[(2j+1)^{m+n}]^2} \left\{ \sin[(2j+1)m+n)t + (2j+1)mh] - \sin(2j+1)mh \right\} \\
 + \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{2j+1}{[(2j+1)^{m-n}]^2} \left\{ \sin[(2j+1)m-n)t + (2j+1)mh] - \sin(2j+1)mh \right\} - \frac{b B_1}{2 A C_m (m+n)} \\
 \left\{ \sin[(m+n)t + mh] - \sin mh \right\} - \frac{b B_1}{2 A C_m (m-n)} \left\{ \sin[(m-n)t + mh] - \sin mh \right\} - \frac{b}{2 A C_m} \cdot \\
 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{(2j+1)^{m+n}} \left\{ \sin[(2j+1)m+n)t + (2j+1)mh] - \sin(2j+1)mh \right\} - \frac{b}{2 A C_m} \cdot \\
 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j+1}}{(2j+1)^{m-n}} \left\{ \sin[(2j+1)m-n)t + (2j+1)mh] - \sin(2j+1)mh \right\} + \frac{1}{A C_m} \left[B_1 \cos m(t+h) + \right. \\
 \left. \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j+1} \cos(2j+1)m(t+h) \right] \left\{ \frac{mb A_1}{2(m+n)} \cos[(m+n)t + mh] + \frac{mb A_1}{2(m-n)} \cos[(m-n)t + mh] + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{2j+1}{(2j+1)m+n} \cos \left[((2j+1)m+n)t + (2j+1)mh \right] +$$

$$+ \frac{mb}{2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \frac{2j+1}{(2j+1)m-n} \cos \left[((2j+1)m-n)t + (2j+1)mh \right]$$

En se bornant aux termes de degré non supérieur à 1 par rapport à c_m , on obtient :

$$x_1 = (7.15) + \frac{mb A_1 B_1}{2KAC_m(m+n)} \left\{ \sin m(t+h) \sin [(m+n)t+mh] \cos m(t+h) \cos [(m+n)t+mh] \right\}$$

$$+ \frac{mb A_1 B_1}{2KAC_m(m-n)} \left\{ \sin m(t+h) \sin [(m-n)t+mh] + \cos m(t+h) \cos [(m-n)t+mh] \right\} - \frac{mb A_1 B_1}{2KAC_m}$$

$$\sin mh \sin m(t+h) \left[\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n} \right] = (7.15) + \frac{m^2 b A_1 B_1}{2 A(m^2-n^2) C_m} [\cos nt - \sin mh - \sin m(t+h)]$$

ou, en tenant compte de (7.15) et (11.6) :

(11.14)

$$x_1 = \frac{a \cos mh}{2KA^2 C_m^2} \left(1 + \frac{2.35}{32K^2} C_m^2 \right) \cos m(t+h) + \frac{m H C_m}{2KA} \sin m(t+h) + \frac{a}{4Ka} \cos mt$$

$$+ \frac{bm^2}{(m^2-n^2)KA} \cos mt - \frac{3a\sigma}{32K^2 2h^2 K} \cos mh \cos 3m(t+h) - \frac{2m^3 b H C_m}{(m^2-n^2) a K A} \sin m(t+h) + \alpha_1 u =$$

$$x_1^* + \alpha_1 u$$

La constante α_1 sera déterminée par la condition de périodicité de la fonction x_2 , qui est donnée par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + (k^2 - 3\gamma \xi^{(n)^2}) x_2 = 3\gamma \xi^{(n)} x_1^2 - 2H \frac{dx_1}{dt}$$

La condition pour que la fonction x_2 soit périodique, compte tenu de (3.18), a la forme :

$$\int_0^{2\pi} (3\gamma \xi^{(n)} x_1^2 - 2H \frac{dx_1}{dt}) u dt = 0$$

ou, en tenant compte de (11.14) :

$$6\gamma\alpha_1 \int_0^{2\pi} x_1^* \xi^{(m)} u^2 dt = \int_0^{2\pi} \left[2H \frac{dx_1^*}{dt} - 3\gamma \xi^{(m)} x_1^{*2} \right] u dt + 2\alpha_1 H \int_0^{2\pi} \frac{du}{dt} u dt - \\ - 3\gamma\alpha_1^2 \int_0^{2\pi} \xi^{(m)} u^3 dt$$

Ainsi qu'on l'a remarqué dans le paragraphe 7 :

$$\int_0^{2\pi} u \frac{du}{dt} dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} \xi^{(m)} u^3 dt$$

(pour la dernière égalité, voir aussi [67, chap. VI, par. 3]).

Alors :

$$(11.15) \quad \alpha_1 = \frac{\int_0^{2\pi} \left[2H \frac{dx_1^*}{dt} - 3\gamma \xi^{(m)} x_1^{*2} \right] u dt}{6\gamma \int_0^{2\pi} x_1^* \xi^{(m)} u^2 dt}$$

En se bornant seulement aux puissances inférieures par rapport à c_m , tant dans les fonctions x_1^* , $\dot{x}_1^*$ que dans les expressions pour u et $\xi^{(m)}$, on trouve :

$$\int_0^{2\pi} \left[2H \frac{dx_1^*}{dt} - 3\gamma \xi^{(m)} x_1^{*2} \right] u dt = (7.17) a) \cdot m + \frac{2Hbm^2n}{(m^2-n^2)KA} c_m \int_0^{2\pi} \sin m(t+h) \sin nt dt \\ + \frac{3\gamma abm^2 \cos mh}{K^2 A^2 (m^2-n^2)} \int_0^{2\pi} \cos^2 m(t+h) \cos nt \sin m(t+h) dt - \frac{6\gamma m^4 bH \cos mh}{(m^2-n^2) K^2 A^3} c_m \cdot \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 m(t+h) \sin^2 m(t+h) dt = \\ = (7.17) a) \quad m - \frac{3\pi\gamma m^4 bH \cos mh}{(m^2-n^2) K^2 A^3} c_m$$

En tenant compte aussi de (7.17)b), on obtient pour α_1 , l'expression suivante :

$$\alpha_1 = (7.18) \quad - \frac{4m^2 bH}{a(m^2-n^2)KA}$$

ou

$$(11.16) \quad \alpha_1 = \frac{4 H}{3 \gamma c_n^2} + \frac{7 H}{24 k^2} + \frac{2 \Lambda H}{3 \gamma} + \frac{3 H}{2 K \Lambda} - \frac{4 m^2 h H}{a(m^2 - n^2) K A}$$

Ainsi donc, dans la première approximation, les formules (7.10), (2.6), (3.21), (3.22), (11.2), (11.6) et (11.14), donnent la solution périodique $\{x^{(m)}\}$ de l'équation (11.1).

B) Solution périodique $\{x^{(0)}\}$:

On pose le problème de trouver une solution périodique que nous désignerons par $\{x^{(0)}\}$, qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution triviale $x = 0$, quand k diffère d'un certain entier.

Dans ce cas, sont aussi remplies toutes les conditions du théorème de POINCARÉ. Alors l'équation (11.1) admet, pour μ suffisamment petit, une solution périodique unique, analytique par rapport à μ , qui s'annule pour $\mu = 0$.

On cherchera, en conséquence, la solution $\{x^{(0)}\}$ sous forme de la série :

$$(11.17) \quad x^{(0)} = \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

où les coefficients $x_i(t)$ sont des fonctions périodiques ayant la période 2π .

En substituant, dans l'équation (11.1), x par la série (11.17), et en égalant les coefficients des mêmes puissances de μ , on obtient les équations différentielles qui déterminent, de proche en proche, tous les coefficients $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) :

$$(11.18) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 x_1 &= a \cos nt + b \cos nt \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k^2 x_2 &= -2H \frac{dx_1}{dt} = \frac{2H a m}{k^2 - m^2} \sin mt + \frac{2H b n}{k^2 - n^2} \sin nt \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} + k^2 x_3 &= \gamma x_1^3 - 2H \frac{dx_2}{dt} = \gamma \left[\frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{k^2 - n^2} \cos nt \right]^3 - 4H^2 \left[\frac{m^2 a}{(k^2 - m^2)^2} \cos mt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2 b}{(k^2 - n^2)^2} \cos nt \right] \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

A partir de ces équations, on trouve :

$$x_1 = \frac{a}{k^2 - m^2} \cos mt + \frac{b}{k^2 - n^2} \cos nt$$

(11.19)

$$x_2 = \frac{2 H n a}{(k^2 - m^2)^2} \sin mt + \frac{2 H n b}{(k^2 - n^2)^2} \sin nt$$

Pour trouver x_3 , on écrira plus explicitement son équation différentielle :

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + k^2 x_3 = \frac{a^3 \gamma}{4(k^2 - m^2)^3} (3 \cos mt + \cos 3mt) + \frac{3a^2 b \gamma}{4(k^2 - m^2)^2 (k^2 - n^2)} [2 \cos nt + \cos (2m+n)t + \cos (2m-n)t] +$$

$$+ \frac{3ab^2 \gamma}{4(k^2 - m^2)(k^2 - n^2)^2} [2 \cos mt + \cos (2m+m)t + \cos (2n-m)t] +$$

$$\frac{\gamma b^3}{4(k^2 - n^2)^3} (3 \cos nt + \cos 3nt) - \frac{4H^2 m^2 a}{(k^2 - m^2)^2} \cos mt + \frac{4H^2 n^2 b}{(k^2 - n^2)^2} \cos nt$$

à partir de cette équation, on obtient aisément l'expression de x_3 :

(11.20)
$$x_3 = \left[\frac{3a^3 \gamma}{4(k^2 - m^2)^4} + \frac{3a^2 b \gamma}{2(k^2 - m^2)^2 (k^2 - n^2)^2} - \frac{4H^2 m^2 a}{(k^2 - m^2)^3} \right] \cos mt +$$

$$+ \left[\frac{3\gamma b^3}{4(k^2 - n^2)^4} + 3 \frac{\gamma a^2 b}{2(k^2 - m^2)^2 (k^2 - n^2)^2} - \frac{4H^2 n^2 b}{(k^2 - n^2)^3} \right] \cos nt + \frac{a^3 \gamma}{4(k^2 - m^2)^3 (k^2 - 9m^2)} \cos 3mt$$

$$+ \frac{b^3 \gamma}{4(k^2 - n^2)^3 (k^2 - 9n^2)} \cos 3nt + \frac{3a^2 b \gamma}{4(k^2 - m^2)^2 (k^2 - n^2) [k^2 - (2m+m)^2]} \cos (2m+m)t$$

$$+ \frac{3a^2 b \gamma}{4(k^2 - m^2)(k^2 - n^2) [k^2 - (2m-n)^2]} \cos (2m-n)t + \frac{3ab^2 \gamma}{4(k^2 - m^2)(k^2 - n^2) [k^2 - (2m+n)^2]} \cos (2m+n)t$$

$$+ \frac{3ab^2 \gamma}{4(k^2 - m^2)(k^2 - n^2) [k^2 - (2m-m)^2]} \cos (2m-m)t$$

Ainsi donc, les formules (11.17) - (11.20) déterminent la solution $\{x^{(0)}\}$.

C) Solution à la résonance $\{x^{(rés)}\}$:

Dans le problème que nous allons traiter, nous pourrions trouver une solution périodique $\{x^{(rés)}\}$ tant dans le voisinage $k = m$ que dans le voisinage de $k = n$. Mais étant donné que les solutions respectives sont semblables, on se bornera à trouver les vibrations du système dans le voisinage de la résonance $k = m$.

Dans ce but, on pose :

$$m^2 - k^2 = \mu \lambda$$

et alors l'équation (11.1) prend la forme :

$$(11.21) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + m^2 x - \gamma x^3 = \mu \left(a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{dx}{dt} + \lambda x \right)$$

Etant donné que toutes les conditions du théorème de MALKIN (Voir par. 5) sont remplies, on cherchera la solution périodique $\{x^{(rés)}\}$ de l'équation (11.21) sous forme de la série :

$$(11.22) \quad x^{(rés)} = x_1 \mu^{\frac{1}{3}} + x_2 \mu^{\frac{2}{3}} + x_3 \mu + \dots$$

qui satisfait formellement l'équation (11.21). Les coefficients x_i sont certaines fonctions périodiques, qui se trouvent à l'aide des équations différentielles obtenues en faisant, dans l'équation (11.21), la substitution (11.22) et en égalant ensuite les coefficients des mêmes puissances de μ :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + m^2 x_1 = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + m^2 x_2 = 0$$

$$\frac{d^2 x_3}{dt^2} + m^2 x_3 = \gamma x_1^3 + a \cos mt + b \cos nt$$

(11.23)

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} + m^2 x_4 = 3 \gamma x_1^2 x_2 - 2H \frac{dx_1}{dt} + \lambda x_1$$

$$\frac{d^2 x_5}{dt^2} + m^2 x_5 = 3 \gamma x_1^2 x_3 + 3 \gamma x_1 x_2^2 - 2H \frac{dx_2}{dt} + \lambda x_2$$

.....

D'ici, on trouve :

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos m t + B_1 \sin m t \\ (11.24) \quad x_2 &= A_2 \cos m t + B_2 \sin m t \end{aligned}$$

où A_1 , A_2 , B_1 et B_2 sont certaines constantes qui seront déterminées par les conditions de périodicité des fonctions x_3 et x_4 .

En vertu des calculs du paragraphe 9, l'équation différentielle de x_3 devient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_3}{dt^2} + n^2 x_3 &= \frac{\gamma}{4} \left\{ \left[3 A_1^3 + 3 A_1 B_1^2 + \frac{4a}{\gamma} \right] \cos nt + 3(B_1^3 + A_1^2 B_1) \sin nt + \right. \\ &\quad \left. + (A_1^3 - 3 A_1 B_1^2) \cos 3nt + (3 A_1^2 B_1 - B_1^3) \sin 3nt \right\} + b \cos nt \end{aligned}$$

La condition de périodicité de la fonction x_3 donne :

$$A_1 (A_1^2 + B_1^2) = -\frac{4a}{3\gamma} \quad ; \quad B_1 (A_1^2 + B_1^2) = 0 \quad , \text{ d'où :}$$

$$(11.25) \quad A_1 = -\sqrt{\frac{4a}{3\gamma}} \quad , \quad B_1 = 0$$

La fonction x_3 sera :

$$(11.26) \quad x_3 = \frac{a}{24 m^2} \cos 3 nt + \frac{b}{n^2 - n^2} \cos nt + A_3 \cos nt + B_3 \sin nt$$

De la condition de périodicité de la fonction x_4 , comme on le montre dans le paragraphe 9 (9.7), on trouve :

$$(11.27) \quad A_2 = \frac{4\lambda}{9\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \quad , \quad B_2 = \frac{8 H m}{3\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}}$$

Pour déterminer les constantes A_3 et B_3 on utilise la condition de périodicité de la fonction x_5 . Pour déterminer la fonction x_5 , en utilisant aussi les calculs du paragraphe 9, on a l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{dx_5}{dt^2} + m^2 x_5 &= \left[\frac{3\gamma}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\gamma}\right)^2} \left(3A_3 + \frac{a}{24m^2}\right) - \frac{32 H^2 n^2}{3\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \right] \cos nt + \\ &\quad + \left[\frac{3\gamma}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\gamma}\right)^2} \left(\frac{a}{12 n^2} + A_3\right) - \frac{4}{3\gamma} \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \left(\frac{\lambda^2}{9} + 4H^2 n^2\right) \right] \cos 3nt \\ &\quad + \frac{3\gamma}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\gamma}\right)^2} \left[2 \cos nt + \cos(2m+n)t + \cos(2m-n)t \right] + \\ &\quad + \frac{3\gamma}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{4a}{3\gamma}\right)^2} B_3 + \frac{16}{9\gamma} \lambda H m \sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}} \sin nt \end{aligned}$$

La condition de périodicité de cette fonction donne :

$$(11.28) \quad A_3 = -\frac{a}{72 m^2} + \frac{32 H^2 m^2}{9 a \gamma} \quad B_3 = -\frac{16 \lambda H m}{9 a \gamma}$$

Les formules (11.22) - (11.28) déterminent la solution périodique à la résonance dans le voisinage de $k = m$.

XII - STABILITE DES SOLUTIONS PERIODIQUES TROUVES DANS LE PARAGRAPHE XI.

Pour la stabilité des solutions périodiques de l'équation :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt + b \cos nt - 2H \frac{dx}{dt})$$

on remarque aisément que les mêmes affirmations, faites dans le paragraphe 10, restent valables.

Les conditions de stabilité sont données par les mêmes formules (10.2), (10.3) et (10.4), sans rien ajouter. Par conséquent, tant la solution $\{x^{(m)}\}$ que les solutions $\{x^{(0)}\}$ et $\{x^{(rés)}\}$ du paragraphe 11 sont asymptotiquement stables, à l'exception de la solution $\{x^{(n)}\}$ qui correspond à $c_n > 0$ et qui est instable.

Remarques :

1) De ce que nous venons d'exposer dans les paragraphes 11 et 12, on remarque que la méthode utilisée pourrait aussi être utilisée pour résoudre le problème de DUFFING dans le cas où la force excitatrice est une fonction périodique plus complexe que celle étudiée par nous (c'est-à-dire lorsque la force excitatrice contient plusieurs harmoniques, non seulement deux). Ainsi, par exemple, on peut étudier les vibrations d'un système dont la force excitatrice a la forme :

$$f(t) = a \cos mt + \sum_{i=1}^p b_i \cos n_i t \quad \text{(une fonction a } p+1 \text{ harmoniques)}$$

où $n_i \neq m$ sont certains entiers différents entre eux, c'est-à-dire d'un système décrit par l'équation :

$$(12.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt + \sum_{i=1}^p b_i \cos n_i t - 2H \frac{dx}{dt})$$

En plus, le problème peut être généralisé dans le cas où $f(t)$ est une fonction périodique de période 2π qui se développe en série de Fourier.

Les calculs, pour un tel cas, seront analogues à ceux que nous venons d'exposer dans les précédents exemples lorsque k varie. C'est seulement le caractère du développement des vibrations qui se complique en quelque sorte parce que la première harmonique est prédominante (Voir par. 13). On s'y attendait conformément aux résultats théoriques [67, ...].

2) Le problème étudié dans le paragraphe 11 aurait aussi pu être résolu à l'aide de la théorie quasi-linéaire. Dans ce cas, certainement, pour déterminer les vibrations dans le voisinage de la résonance, il aurait fallu résoudre un système de deux équations cubiques (pour déterminer les amplitudes de la solution génératrice (Voir [88], chap. IV, par. 10), et ensuite analyser les neuf solutions périodiques ainsi obtenues.

Si l'ordre de non-linéarité (de l'équation (12.11)) avait été plus grand que trois, alors l'ordre du système d'équations qui déterminent les amplitudes de la solution génératrice aurait été aussi plus grand que trois. Cela aurait mené à la non-efficacité de la méthode. Mais la méthode utilisée dans le paragraphe 11, en ce cas, ne complique pas les calculs.

On peut, enfin, donner des exemples pour lesquels la méthode quasi-linéaire conduit, en général, à des erreurs. (Par exemple, la méthode peut conduire à l'absence des solutions périodiques de l'équation $\ddot{x} + n^2 x - \beta x^2 = \mu \cos nt$, solutions qui existent en réalité).

XIII - LE CARACTERE DU DEVELOPPEMENT DES VIBRATIONS.

Nous allons analyser le caractère du développement des vibrations forcées en présence d'une force de résistance lorsque la force excitatrice contient deux harmoniques car, dans ce cas, le caractère du mouvement est le même, mais plus complet que dans le cas des vibrations forcées, avec ou sans amortissement, lorsque la force excitatrice contient une seule harmonique.

De ce qui a été exposé dans le paragraphe 11, on peut tirer quelques conclusions précises sur le caractère du développement des vibrations en fonction de la variation du coefficient k .

Supposons que $n > m$ et que $k < m$. Dans ce cas, les vibrations se développent suivant la solution stable $\{x^{(0)}\}$. A mesure que k s'approche de m , la série qui détermine la solution $\{x^{(0)}\}$ commence à diverger. De là, il ne résulte pas que la solution $\{x^{(0)}\}$ cesse d'exister. La solution peut se maintenir, mais elle aura une autre expression analytique. Par une analyse plus détaillée, on montre qu'à mesure que k s'ap-

proche de m , la solution $\{x^{(0)}\}$ passe continûment à la solution de résonance (dans le voisinage de $k = m$), et la dernière, à mesure que k s'agrandit, passe continûment à la solution $\{x^{(m)}\}$, qui apparaît après la résonance et qui correspond à la valeur négative de c_m . Pour une telle valeur de k (ou un peu plus grande), il existera aussi la solution $\{x^{(m)}\}$, qui correspond à la valeur positive de c_m , et aussi à nouveau, la solution $\{x^{(0)}\}$. Mais, la solution $\{x^{(m)}\}$ correspondant à la valeur positive de c_m , comme on l'a déjà montré dans le paragraphe 12, sera instable.

Si, en continuant, on accroît le coefficient k , alors la quantité c_m , comme il résulte de l'équation qui la détermine (2.6) et (2.6'), augmentera en valeur absolue, c'est-à-dire l'amplitude des vibrations correspondantes augmentera - Voir (11.2) et (2.5) - et par conséquent ces vibrations deviendront instables.

Supposons que cette instabilité ait lieu pour $k = k^*$. Pour voir comment se développent les vibrations pour les valeurs de $k > k^*$, il faut analyser la différence $n - m$. Nous avons affaire à deux cas différents selon que la différence $n - m$ est ou non suffisamment grande.

a) Supposons qu'au commencement la différence $n - m$ soit suffisamment grande. Soit $n > k^*$. Dans ce cas, lorsque $k = k^*$, la seule solution stable est $\{x^{(0)}\}$.

Grâce à ce fait, les vibrations passent, par saut, au régime déterminé par la solution $\{x^{(0)}\}$. Par l'augmentation ultérieure de k , la solution $\{x^{(0)}\}$ passe continûment par la solution de résonance (dans le voisinage de $k = n$) dans la solution $\{x^{(n)}\}$, qui correspond à la valeur négative de c et ensuite, quand elle perd la stabilité, la solution $\{x^{(n)}\}^n$ passe à nouveau dans la solution $\{x^{(0)}\}$ (aussi par saut).

Sur la figure 13, on montre la liaison qui existe entre différentes solutions périodiques. Les courbes en pointillé correspondent aux solutions génératrices $\{\zeta^{(m)}(t+h)\}$ et $\{\zeta^{(n)}(t+h)\}$ (les courbes "squelettes").

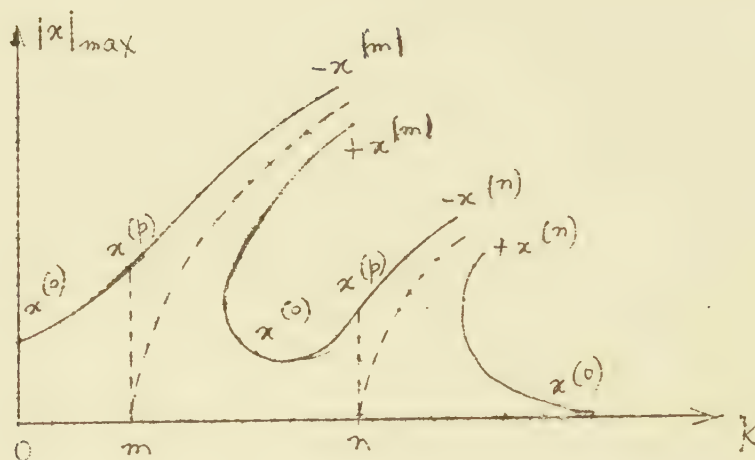


Figure 13

b) Supposons maintenant que la différence $n - m$ soit petite et que $n < k^*$. Dans ce cas, les vibrations se développent conformément à la solution $\{x^{(m)}\}$ pour c_m négatif, non seulement pour k plus petit que n , mais aussi pour les valeurs de k égales ou plus grandes que n . Par conséquent, bien que la deuxième harmonique se trouve en résonance, c'est la première harmonique qui prédominera dans les vibrations forcées. Pour $k > k^*$, les vibrations s'interrompent et se développent ensuite suivant, soit la solution $\{x^{(0)}\}$, soit la solution $\{x^{(n)}\}$ (correspondant à c_n négatif) qui peut être, à ce moment-là, encore stable.

Toutes les conclusions, en ce qui concerne le caractère du développement des vibrations, peuvent être mieux expliquées si l'on construit les courbes de résonance. En tenant compte des expressions des solutions $\{\xi^{(m)}\}$, $\{\xi x^{(m)}\}$, $\{x^{(0)}\}$, $\{x^{(rés)}\}$, les courbes de résonance ont l'aspect désigné par la figure 13, et le caractère du développement des vibrations est indiqué par les diagrammes ci-dessous.

Sur la figure 14, on a montré par flèches le développement des vibrations quand k augmente graduellement, lorsque la différence $n - m$ est suffisamment grande.

Sur la figure 15, on a montré l'une des variantes possibles du développement des vibrations, dans le cas où la différence $n - m$ est petite.

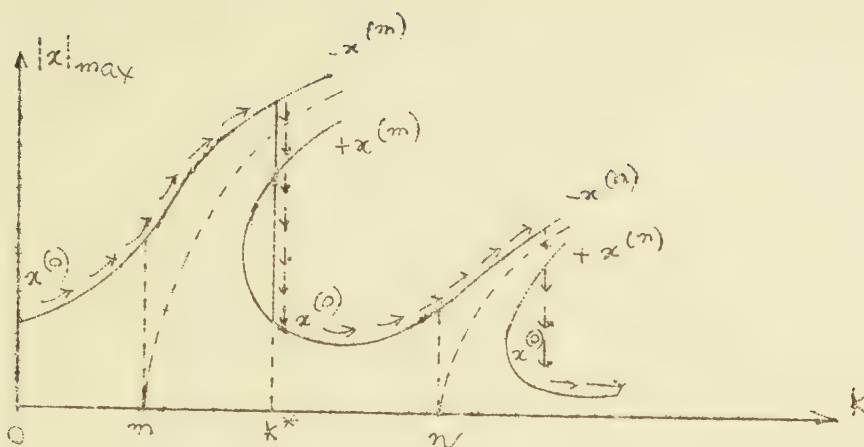


Figure 14

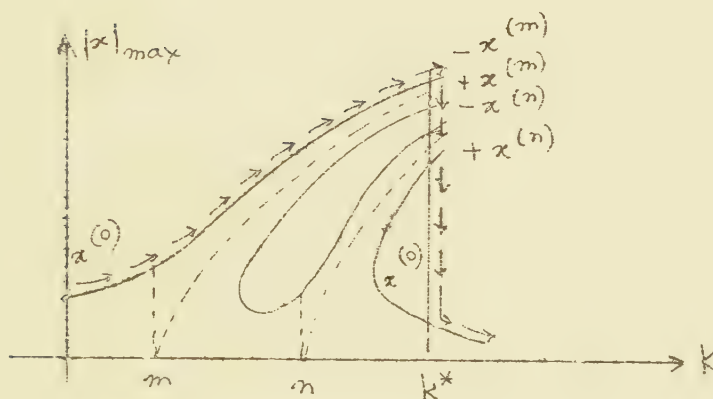


Figure 15

Remarque : Dans le cas où la force excitatrice contient un seul harmonique, les vibrations se développent pour $k < m$ suivant la solution stable $\{x^{(0)}\}$, ensuite, en passant continûment par la solution de résonance ($k = m$), elle se développera pour $k > m$ suivant la solution stable $\{x^{(m)}\}$ correspondant à c_m négatif, aussi longtemps que k n'a pas touché la valeur k^* . Dès que la quantité $k \geq k^*$, les vibrations passent par saut à un autre régime stable suivant la solution stable $\{x^{(0)}\}$.

XIV - VIBRATIONS SOUS-HARMONIQUES DU PROBLEME DE DUFFING.

Définition :

Considérons l'équation

$$(14.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x + F(x) = \mu f(t, x, \dot{x}, \mu)$$

où $F(x)$ est une fonction analytique par rapport à x , dont le développement commence par des termes de degré non inférieurs au second ; $f(t, x, \dot{x}, \mu)$ est une fonction analytique par rapport aux $x, \dot{x}$ et μ (pour les valeurs petites de μ) et périodique par rapport à t , ayant la période T .

Les vibrations forcées, définies par l'équation (14.1) dont la période est égale à $m T$ (où m est un entier), c'est-à-dire dont la période est m fois plus grande que la période de la force excitatrice, s'appellent [38,...] des vibrations sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{m}$. Il est clair que ces vibrations forcées peuvent être calculées par les méthodes utilisées plus haut, si les vibrations propres (libres) de l'équation (14.1) ont la période égale à $m T$.

Considérons l'équation de DUFFING sous la forme :

$$(14.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu (a \cos mt - 2 H \frac{dx}{dt}) ;$$

$$\gamma > 0, H > 0, a > 0$$

et calculons les vibrations sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{m}$.

En tenant compte des résultats des paragraphes 2 et 7, on remarque que la solution, désignée par $\{x^{(0)}\}$ de l'équation (14.2), représente évidemment la solution cherchée, c'est-à-dire la solution sous-harmonique d'ordre $\frac{1}{m}$.

Pour le cas où $H = 0$, on obtient les vibrations sous-harmoniques d'ordre $\frac{1}{m}$ de l'équation (3.1), c'est-à-dire les vibrations sous-harmoniques en l'absence de la force de résistance. La solution générale de l'équation génératrice :

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + k^2 \xi - \gamma \xi^3 = 0$$

est donnée par la formule (7.5) :

$$(14.3) \quad \tilde{\xi}^{(1)}(t+h) = A_1 \cos m(t+h) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1} \cos(2j+1)m(t+h)$$

où

$$A_1 = c_1 + \frac{1}{32} \frac{\gamma}{k^2} c_1^3 + \frac{23}{1024} \frac{\gamma^2}{k^4} c_1^5 + \dots$$

$$A_3 = -\frac{1}{32} \frac{\gamma}{k^2} c_1^3 - \frac{3}{128} \frac{\gamma^2}{k^4} c_1^5 + \dots$$

Etant donné que la période T des vibrations libres est donnée (voir (2.3)), par :

$$T = \frac{2\pi}{k} (1 + h_2 c^2 + h_4 c^4 + \dots)$$

$$h_2 = \frac{3}{8} \frac{\gamma}{k^2}, \quad h_4 = \frac{57}{256} \frac{\gamma^2}{k^4}, \dots$$

alors, comme les vibrations libres ont la période m fois la période de la force excitatrice

$$T = 2\pi$$

on trouve facilement l'équation qui détermine c_1 . Cette équation a la forme :

$$(14.4) \quad \frac{3}{8} \frac{\gamma}{k^2} c_1^2 + \frac{57}{256} \frac{\gamma^2}{k^4} c_1^4 + \dots = k - 1 \quad \text{ou}$$

$$c_1 + \frac{19}{64} \frac{\gamma}{k^2} c_1^2 + \dots = \pm \sqrt{\frac{8 k^2 (k-1)}{3 \gamma}}$$

Dans l'hypothèse faite que $\gamma > 0$, cette équation détermine deux valeurs réelles de c_1 , si on a rempli l'inégalité :

$$(14.5) \quad k - 1 > 0$$

et ces valeurs sont égales en modules et de signe opposé.

Par suite des résultats du paragraphe 3, la solution périodique $\{x^{(1)}\}$ de l'équation (14.2) existe si le paramètre h de la solution génératrice satisfait à l'équation :

$$(14.6) \quad P(h) = \int_0^{2\pi} (a \cos mt - 2 H \frac{d\tilde{\xi}^{(1)}(t+h)}{dt}) dt = 0$$

Il y aurait une solution si

$$(14.7) \quad \left(\frac{dP}{dh} \right)_{h=h_{sol}} \neq 0$$

En vertu de la formule (7.4"), l'équation (14.6) devient :

$$(14.8) \quad P(h) = -a A m \pi \sin mh - 2 H A_1^2 m^2 \pi - 2 \pi H m^2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right] = 0$$

qui, dans l'hypothèse que

$$\frac{a}{2 H} > \left| \frac{m}{A_1} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right|,$$

détermine évidemment, deux valeurs pour l'angle mh (dont la somme est égale à 2π)

$$(14.9) \quad \sin mh = - \frac{2 H A_1 m}{a} - \frac{2 H m}{a A_1} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2$$

Dans la première approximation, on trouve (en supposant que l'angle mh soit aigu) :

$$(14.9') \quad \sin mh = \frac{2 m H c_1}{a}$$

On remarque aussi que

$$(14.10) \quad \left(\frac{dP(h)}{dh} \right)_{h=h_{sol}} = -a A_1 m^2 \pi (\cos mh)_{mh} = \arcsin \left[- \frac{2 H A_1^m}{a} - \frac{2 H m}{a A_1} \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j+1}^2 (2j+1)^2 \right] \neq 0$$

Par conséquent, pour les deux valeurs de mh , données par (14.9), et les deux valeurs de c_1 données par (14.4), en tenant compte de la remarque du paragraphe 3, il existe deux vibrations sous-harmoniques $\{x^{(1)}\}$ d'ordre $\frac{1}{m}$, pour chaque m donné. On cherchera les deux solutions sous-harmoniques $\{x^{(1)}\}$ de l'équation (14.2) (correspondant à deux valeurs c_1) sous forme de la série :

$$(14.11) \quad x^{(1)} = \xi^{(1)}(t+h) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots$$

où x_k sont certaines fonctions périodiques de période 2π (pas encore définies) et h est la constante donnée par (14.9).

En remplaçant dans l'équation (14.2) la série (14.11), et en égalant les coefficients de la première puissance de μ on trouve l'équation différentielle qui détermine x_1 :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k^2 - 3\gamma \xi^{(1)})^2 x_1 = a \cos mt - 2H \frac{d\xi^{(1)}}{dt}$$

Conformément aux résultats du paragraphe 7, la fonction x_1 est donnée par la formule (7.14') où il faut faire les modifications correspondantes - Voir (14.12).

En première approximation, x_1 est donnée par :

$$(14.12) \quad x_1 = \frac{a \cos m h}{2 K A^2 c_1^2} \left(1 + \frac{2,3\gamma}{32 k^2} c_1^2\right) \cos m(t+h) + \\ + \frac{m H c_1}{2 K A} \sin m(t+h) + \frac{a \gamma}{4 K A} \cos mt - \frac{3 a \gamma}{32 k^2} \frac{1}{2 A^2 K} \\ \cos mh \cos 3 m(t+h) + \alpha_1 u$$

où h_1 est donnée par l'équation (14.9), c_1 est donné par l'équation (14.4) et

$$u(t+h) = \frac{d \xi^{(1)}}{dt} = - A_1 m \sin m(t+h) - m \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) A_{2j+1} \sin(2j+1)m(t+h)$$

$$K = - \frac{k(k^2 - \gamma c_1^2)}{2 h_2 + 4 h_4 c_1^2}$$

(14.13)

$$A = - \frac{1}{K} (2 h_2 + 4 h_4 c_1^2 + \dots)$$

$$\alpha_1 = \frac{4 H}{3 \gamma c_1^2} + \frac{7 H}{24 k^2} + \frac{2 A H}{3 \gamma} + \frac{3 H}{3 K A}$$

En ce qui concerne la stabilité de la solution sous-harmonique $\{x^{(1)}\}$, on remarque que les deux conditions de stabilité (11.2) sont satisfaites pour $c_1 < 0$, avec le signe d'inégalité stricte. Par conséquent, la solution $\{x^{(1)}\}$ est asymptotiquement stable pour $c_1 < 0$, et instable pour $c_1 > 0$.



C H A P I T R E I I I

VIBRATIONS PRESQUE-PERIODIQUES DE L'EQUATION QUASI- LINEAIRE DE DUFFING

-:-:-

I - NOTIONS FONDAMENTALES.

Définition :

On remarque que la vibration décrite par la fonction

$$x = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$$

c'est-à-dire la superposition des deux vibrations harmoniques simples n'est pas périodique si les fréquences ω_1 et ω_2 sont incommensurables. Cette vibration est un cas très particulier de soit-disant vibrations presque périodiques.

Soit $f(t)$ une fonction continue, définie pour toutes les valeurs de t dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$. Alors, d'après la définition de G. BOHR : la fonction $f(t)$ est dite presque-périodique si, pour n'importe quel nombre positif $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'il soit, on peut trouver un nombre positif $1(\varepsilon)$ de telle sorte qu'à l'intérieur de chaque intervalle de longueur 1, on puisse trouver au moins un nombre $\tau(\varepsilon)$, pour lequel pour tous les t , est satisfaite l'inégalité

$$(1.1) \quad |f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon$$

Propriétés fondamentales des fonctions presque-périodiques

1) Toute fonction presque-périodique $f(t)$ est bornée sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

2) Toute fonction presque-périodique $f(t)$ est uniformément continue dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

3) La somme des fonctions presque-périodiques est une fonction presque-périodique.

Etant donné que les fonctions périodiques sont un cas particulier des fonctions presque-périodiques, il en résulte que les sommes finies à coefficients constants de la forme

$$(1.2) \quad f(t) = A_0 + \sum (A_p \cos \nu_p t + B_p \sin \nu_p t)$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots$ sont des nombres complètement arbitraires, généralement incommensurables entre eux, représentant des fonctions presque-périodiques. Les sommes finies ou infinies de la forme (1.2) seront appelées dans ce qui suit des sommes trigonométriques ou des séries de Fourier généralisées.

4) Le produit des fonctions presque-périodiques est une fonction presque-périodique.

5) Si la fonction presque-périodique $f(t)$ satisfait, dans tout l'intervalle $(-\infty < t < +\infty)$, à la condition $f(t) > \alpha > 0$ où α est une constante, alors la fonction $1/f(t)$ sera elle aussi presque-périodique.

6) La limite $f(t)$ d'une suite uniformément convergente de fonctions presque-périodiques $f_1(t), f_2(t), \dots$, est une fonction presque-périodique. Il en résulte, en particulier, que non seulement les sommes trigonométriques finies, mais aussi les sommes infinies de ce genre, si elles convergent uniformément, représentent des fonctions presque-périodiques.

7) Pour toute fonction presque-périodique $f(t)$, il y a la limite

$$(1.3) \quad g = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(t) dt$$

La quantité g s'appelle moyenne de la fonction presque-périodique $f(t)$. Si, en particulier, la fonction $f(t)$ est périodique de période ω , alors on peut écrire :

$$g = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t) dt$$

On sait que, pour toute fonction périodique $f(t)$, la relation

$$(1.4) \quad \int_0^t f(t) dt = g t + \varphi(t)$$

est vraie, relation où g est la valeur moyenne de cette fonction, et $\varphi(t)$ est une fonction périodique de même période que $f(t)$. Il en ressort que si $f(t)$ est une fonction presque-périodique, mais qui représente une somme de fonctions périodiques de différentes périodes, alors, pour elle, la formule (1.4) sera aussi vraie, mais maintenant $\varphi(t)$ sera une fonction presque-périodique (somme de fonctions périodiques). Dans ce cas, g sera définie par la formule (1.3).

On peut cependant montrer que, dans le cas général, lorsque $f(t)$ est une fonction arbitraire presque-périodique, pour elle la formule (1.4) n'est pas valable. En d'autres termes, en général, il n'y a pas une constante g et une fonction presque-périodique $Q(t)$ liées à la fonction presque-périodique $f(t)$ par la relation (1.4). Dans ce qui suit, nous aurons affaire à de telles fonctions presque-périodiques qui ont la forme (1.2), c'est-à-dire qu'elles sont des séries de Fourier finies (généralisées).

Dans ce cas, nous nous intéressons aux vibrations presque-périodiques du système ayant la forme :

$$(1.5) \quad \frac{dx_s}{dt} = a_{s_1} x_1 + \dots + a_{s_n} x_n + f_s(t) + \mu F_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu)$$

$$(s = 1, \dots, n)$$

que nous allons supposer, dans le cas où il n'est pas autonome, presque-périodique par rapport à t .

Pour simplifier les calculs, on supposera que les équations (1.5) satisfont aux conditions suivantes :

- 1) Les fonctions $f_s(t)$ sont des sommes trigonométriques finies.
- 2) Les fonctions F_s se développent en séries :

$$(1.6) \quad F_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} F_s^{(i)}(t, x_1, \dots, x_n) \mu^{(i)}$$

qui convergent pour $\mu < \mu_0$, où μ_0 est un nombre positif, qui ne dépend pas de $t, x_1, \dots, x_n$.

- 3) Les fonctions $F_s^{(i)}(t, x_1, \dots, x_n)$ dans les séries (1.6) sont des polynômes de $x_1, \dots, x_n$, presque-périodiques par rapport à t fonctions qui se développent par rapport à cette variable, en séries de Fourier finies :

$$F_s^{(i)} = A_{s_0}^{(1)} + \sum A_{sp}^{(i)} \cos \nu_p t + B_{sp}^{(i)} \sin \nu_p t$$

Ici, les sommes contiennent un nombre fini de termes et les coefficients sont des polynômes par rapport à $x_1, \dots, x_n$.

II - QUELQUES PARTICULARITES DU PROBLEME DES VIBRATIONS PRESQUE-PERIODIQUES - DE PETITS DIVISEURS [67] .

Le problème des vibrations presque-périodiques des

systèmes quasi-linéaires se ramène au problème de l'existence et du calcul des solutions presque-périodiques des systèmes d'équations de la forme (1.5). Nous allons nous arrêter seulement sur certaines particularités essentielles. Nous considérerons, dans ce qui suit, comme étant connus les résultats qui ont trait au problème des solutions périodiques des équations quasi-linéaires (Voir la méthode de MALKIN [67]).

Désignons, tout comme dans le problème des solutions périodiques, par $x_s(t, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu)$ la solution du système (1.5) satisfaisant aux conditions initiales

$x_s(0, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu) = \varphi_s(0) + \vartheta_s$, où $\varphi_s(t)$ est la solution génératrice. Tout comme dans le cas des solutions périodiques, les quantités x_s peuvent être représentées sous forme des séries de puissances des quantités $\beta_1, \dots, \beta_n, \mu$, dont les coefficients peuvent être calculés effectivement.

Nous allons essayer de définir les quantités $\beta_1, \dots, \beta_n$ de telle sorte que la solution étudiée soit presque-périodique. En procédant de telle façon, nous nous heurtons à une difficulté fondamentale, par laquelle le problème étudié diffère essentiellement du problème qui concerne les solutions périodiques.

En effet, s'il s'était agi des solutions périodiques de période ω , alors les quantités $\beta_1, \dots, \beta_n$ auraient dû se déterminer à partir des équations :

$$x_s(\omega, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu) - x_s(0, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu) = 0$$

Ainsi, le problème des solutions périodiques se ramène au problème de la solution du système des équations algébriques. Dans notre cas, cependant, le problème des solutions presque-périodiques ne peut pas être résolu par cette voie, car les conditions de presque-périodicité des fonctions $x_s(t, \beta_1, \dots, \beta_n, \mu)$ ne peuvent pas être écrites sous forme d'un système algébrique. Par conséquent, la méthode de base utilisée pour trouver les solutions périodiques est tout-à-fait inapplicable au problème qui concerne les solutions presque-périodiques. Cependant, on peut employer une autre méthode. On peut essayer tout d'un coup de trouver la solution presque-périodique du système (1.5) sous forme de séries formelles, développées suivant les puissances de μ . En utilisant cette méthode, on trouve, en effet, des solutions périodiques et l'on obtient des séries convergentes.

Dans le problème des solutions presque-périodiques, il surgit une autre difficulté fondamentale que nous allons essayer de mettre en évidence en étudiant les vibrations forcées de l'équation quasi-linéaire de DUFFING.

Etudions donc les vibrations du système décrit par

l'équation :

$$(2.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + x = \mu (\gamma x^3 + A \sin t + B \sin \omega t)$$

Si ω avait été un entier, alors on aurait eu affaire au cas le plus simple de vibrations périodiques de l'équation de DUFFING à la résonance. On supposera cependant que ω est un nombre irrationnel, de façon que la force extérieure ne soit pas périodique, et par conséquent il peut être question seulement de vibrations presque-périodiques.

On cherchera la solution presque-périodique de l'équation (2.1) sous forme de la série :

$$(2.2) \quad x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

aux coefficients presque-périodiques.

En remplaçant, dans l'équation (2.1) la série (2.2), et en égalant les coefficients de même puissance de μ , on obtient :

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + x_0 = 0$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = \gamma x_0^3 + A \sin t + B \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 = 3 \gamma x_0^2 x_1$$

La solution cherchée contiendra seulement des fonctions en sinus car l'équation (2.1) ne contient pas $\frac{dx}{dt}$. Par conséquent, la fonction x_0 sera :

$$x_0 = M_0 \sin t$$

où M_0 est une constante arbitraire. Cette constante est déterminée par la condition de presque-périodicité de la fonction x_1 . Grâce à cette condition, l'équation qui détermine la fonction x_1 ne doit pas contenir des termes en $\sin t$. Par conséquent

$$M_0^3 = -\frac{4A}{3\gamma} \quad \text{et}$$

$$x_1 = \frac{1}{32} \gamma M_0^3 \sin^3 t + \frac{B}{1 - \omega^2} \sin \omega t + M_1 \sin t$$

où M_1 est une constante arbitraire, qui se détermine par la condition de presque-périodicité de la fonction x_2 , dont l'é-

quation différentielle est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_2}{dt^2} + x_2 &= 3 \gamma x_0^2 x_1 = 3 \gamma M_0^2 \sin^2 t \left[\frac{1}{32} \gamma M_0^3 \sin 3 t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{1-\omega^2} \sin \omega t \right] + \frac{3 \gamma M_0^2 M_1}{4} (3 \sin t - \sin 3 t) = \\ &= \left[\frac{9 \gamma M_0^2}{4} M_1 - \frac{3 \gamma^2 M_0^5}{4 \cdot 32} \right] \sin t + \left[\frac{3 \gamma^2 M_0^5}{64} - \frac{3 \gamma M_0^2 M_1}{4} \right] \sin 3 t - \\ &\quad - \frac{3 \gamma^2 M_0^5}{4 \cdot 32} \sin 5 t + \frac{3 \gamma M_0^2 B}{2(1-\omega^2)} \sin \omega t - \frac{3 \gamma M_0^2 B}{4(1-\omega^2)} \cdot \\ &\quad \left[\sin(\omega+2)t + \sin(\omega-2)t \right]. \end{aligned}$$

D'ici, l'on trouve :

$$M_1 = \frac{\gamma M_0^3}{96}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5\delta M_0^2 A}{768} \sin 3 t - \frac{\gamma M_0^2 A}{768} \sin 5 t + \frac{3 \gamma M_0^2 B}{2(1-\omega^2)^2} \sin \omega t - \\ &\quad - \frac{3 \gamma M_0^2 B}{4(1-\omega^2)[1-(\omega+2)^2]} \sin(\omega+2)t - \frac{3 \gamma M_0^2 B}{4(1-\omega^2)[1-(\omega-2)^2]} \\ &\quad \sin(\omega-2)t + M_2 \sin t \end{aligned}$$

où M_0 est à nouveau une constante arbitraire.

En continuant les calculs, on obtient une série (2.2) complètement déterminée, à coefficients périodiques, série qui satisfait formellement l'équation (2.1).

Ainsi donc, le fait que la quantité ω est irrationnelle n'introduit aucune difficulté dans la construction formelle de la solution presque périodique et les calculs se déroulent de la même façon que dans le cas où l'on détermine les solutions périodiques. Malheureusement, la série ainsi obtenue diverge. Cette divergence est due au fait suivant :

Les parties droites des équations qui déterminent les fonctions x_n contiendront des termes de la forme :

$$(2.3) \quad A_{mn} \sin (m \omega + n t)$$

où m et n sont des entiers, n peut être aussi bien positif que négatif.

Pour k suffisamment grand, on trouve, dans l'équation des x_k , des termes de la forme (2.3), où m et n ont des valeurs aussi grandes que nous le voulons.

Aux termes (2.3) leur correspondent, dans les expressions des fonctions x_k des termes de la forme

$$\frac{A_{m,n}}{1 - (m\omega + n)^2} \sin (m\omega + n) t$$

Mais quel que soit l'entier ω , on peut toujours trouver des valeurs entières pour m et n telles que le nombre $m\omega + n$ ne soit pas égal à 1, mais diffère de celui-ci par n'importe quelle petite valeur. Par conséquent, la fonction x_k contiendra des termes avec des dénominateurs aussi petits que nous le voulons. La présence de pareils "petits diviseurs" entraînent la divergence de la série (9.2).

Des faits analogues ont également lieu dans le cas général des équations (1.5). La construction des solutions formelles presque-périodiques n'entraîne pas de difficultés plus grandes que la construction des solutions périodiques dans le cas des équations périodiques. Néanmoins, ces séries s'obtiennent d'habitude divergentes étant donné que leurs termes contiennent des "petits diviseurs".

A cause de ces particularités, le problème des vibrations presque-périodiques devient un des problèmes les plus difficiles dans la théorie des vibrations non-linéaires. Malgré tout, à présent il y a une série de résultats fondamentaux. Ils ont été en particulier établis par les recherches multiples de N.M. KRYLOV et N.N. BOGOLJUBOV, et surtout par l'ouvrage de N.N. BOGOLJUBOV "Sur quelques méthodes statistiques dans la physique mathématique" [10].

Dans ce qui suit, on étudiera les solutions presque-périodiques de l'équation de DUFFING, en s'appuyant sur les résultats de KRYLOV et BOGOLJUBOV.

III - SOLUTIONS PRESQUE-PERIODIQUES DE L'EQUATION DE DUFFING.

Considérons l'équation quasi-linéaire :

$$(3.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t + \mu (\gamma x^3 - 2H \frac{dx}{dt})$$

$$(a > 0, b > 0, \gamma > 0) H > 0$$

et supposons que le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ soit irrationnel, c'est-à-dire que la fonction $-k f_2(t) = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$ soit presque-périodique.

Le cas où $\bar{f}_2(t)$ est une fonction périodique a été étudié dans le chap. II, paragraphe 11. A cette occasion, on a montré que si $c_m = -2k \sqrt{\frac{2(k-m)}{3m\delta}}$ est suffisamment petit, (c'est-à-dire $k > m$, mais suffisamment proche de m), alors notre système possède un régime vibratoire stable. Si, au contraire, k ($k = k^*$, par exemple) diffère trop de la fréquence de la force excitatrice (m , par exemple), alors les vibrations périodiques $\{x^{(m)}\}$ deviennent instables et, physiquement, ne peuvent pas prendre naissance. (Dans ce cas - comme on l'a montré au chap. II, par. 3 - les vibrations passent par saut dans un autre régime, suivant la solution stable $\{x^{(0)}\}$). Dans ce cas, des vibrations presque-périodiques stables prennent probablement naissance, dans le système vibratoire.

Comme dans le cas des solutions périodiques, on remarque ici deux cas : le cas de non-résonance et le cas de résonance. Nous dirons que nous avons affaire au cas de non-résonance si aucune quantité $mk + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ n'est petite d'ordre μ . Ici, m, m_1, m_2 , sont certains entiers positifs ou négatifs pour lesquels $|m| + |m_1| + |m_2| \leq 5$ et $m \neq 0$ - Voir les formules (3.14).

Cas de non-résonance :

En faisant, dans l'équation (3.1), la substitution

$$x = x_1$$

$$\frac{dx}{dt} = -k x_2$$

l'équation (3.1) s'écrit sous forme du système :

$$(3.1') \quad \frac{dx_1}{dt} = -k x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k x_1 - \frac{a}{k} \cos \omega_1 t - \frac{b}{k} \cos \omega_2 t - \frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2H k x_2)$$

Pour $\mu = 0$, on obtient le système linéaire non homogène :

$$(3.2) \quad \frac{dx_1}{dt} = -k x_2 = -k x_2 + \bar{f}_1(t) \quad \text{où} \quad f_1(t) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k x_1 - \frac{a}{k} \cos \omega_1 t - \frac{b}{k} \cos \omega_2 t = k x_1 + \overline{f_2}(t)$$

Le système linéaire homogène (auto-adjoint) :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -k x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= k x_1 \end{aligned}$$

dont l'équation déterminante

$$(3.4) \quad \begin{vmatrix} -\rho & -k \\ k & -\rho \end{vmatrix} = \rho^2 + k^2 = 0$$

a deux racines purement imaginaires $\rho_{1,2} = \pm ki$ (donc, avec les parties réelles nulles), admet le système fondamental suivant de solutions périodiques (qui, en même temps, peuvent aussi être considérées comme des solutions presque-périodiques):

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x_{11} &= \cos k t & x_{12} &= \sin k t \\ x_{21} &= \sin k t & x_{22} &= -\cos k t \end{aligned}$$

pour lesquelles $x_{11}(0) = |x_{22}(0)| = 1$, $x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0$.

Ces solutions représentent en même temps le système fondamental $\psi_{\alpha r}$ ($\alpha, r = 1, 2$) de solutions du système adjoint au (3.3).

Etant donné que, dans le système (3.2), les fonctions f_{α} ($\alpha = 1, 2$) représentent des sommes trigonométriques finies, alors, pour que le système (3.2) admette une solution presque-périodique, lorsque l'équation (3.4) a des racines avec les parties réelles nulles, il faut et il suffit que :

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{\alpha=1}^2 f_{\alpha}(t) \psi_{\alpha r} dt = 0 \quad (r = 1, 2) \quad (1)$$

Dans le cas étudié, on remarque facilement que les relations (3.6) sont remplies parce que l'expression qui se trouve sous intégrale contient seulement des termes périodiques

(1) Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général établi par MALKIN [] .

différents de constantes. Par conséquent, le système (3.2) admet une solution presque-périodique qui représente la solution générale (du système (3.2)) :

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad x_1 &= M_1 \cos kt + M_2 \sin kt + \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \\
 &\quad + \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \\
 x_2 &= M_1 \sin kt - M_2 \cos kt + \frac{a \omega_1}{k(k^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t + \\
 &\quad + \frac{b \omega_2}{k(k^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t
 \end{aligned}$$

Dans les hypothèses faites, on peut ramener le système (3.1) à la forme "standard", c'est-à-dire à un système de la forme :

$$\frac{dx_s}{dt} = \mu F_s(t, x_1, x_2, \mu) ; \quad (s = 1, 2)$$

Dans ce but, à l'aide de la substitution (3.7), on transforme les équations (3.1') (où l'on introduit au lieu de x_1 et x_2 les fonctions M_1 et M_2).

De (3.7) et (3.1'), compte tenu que (3.7) est la solution générale du système générateur, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_1}{dt} \cos kt + \frac{dM_2}{dt} \sin kt &= 0 \\
 \frac{dM_1}{dt} \sin kt - \frac{dM_2}{dt} \cos kt &= -\frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2 H k x_2)
 \end{aligned}$$

où, au lieu de x_1 et x_2 , il faut introduire leurs expressions données par (3.7).

En résolvant le système ainsi obtenu par rapport aux dérivées de M_1 et M_2 , on trouve :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = -\frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2 H k x_2) \sin kt \\ \frac{dM_2}{dt} = \frac{\mu}{k} (\gamma x_1^3 + 2 H k x_2) \cos kt \end{cases}$$

On écrira ensuite le système (3.8) sous une forme plus convenable :

$$\frac{dM_1}{dt} = -\frac{\mu}{k} \left\{ \gamma [M_1 \cos kt + M_2 \sin kt + a' \cos \omega_1 t + b' \cos \omega_2 t]^3 + \right. \\ \left. + 2 H k [M_1 \sin kt - M_2 \cos kt + \bar{a} \sin \omega_1 t + \bar{b} \sin \omega_2 t] \right\} \sin kt$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{\mu}{k} \left\{ \gamma [M_1 \cos kt + M_2 \sin kt + a' \cos \omega_1 t + b' \cos \omega_2 t]^3 + \right. \\ \left. + 2 H k [M_1 \sin kt - M_2 \cos kt + \bar{a} \sin \omega_1 t + \bar{b} \sin \omega_2 t] \right\} \cos kt$$

où

$$a' = \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} \quad \bar{a} = \frac{a \omega}{k(k^2 - \omega_1^2)}$$

(3.9)

$$b' = \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} \quad \bar{b} = \frac{b \omega_2}{k(k^2 - \omega_2^2)}$$

En faisant tous les calculs, les équations (3.8) s'écrivent :

(3.10)

$$\frac{dM_1}{dt} = \mu \left\{ \left[-\frac{3\gamma}{8k} M_2 (M_1^2 + M_2^2) - H M_1 - \frac{3\gamma}{4k} M_2 (a'^2 + b'^2) \right] + \frac{\gamma}{8k} M_2 (3M_1^2 - M_2^2) \cos 4kt + \right. \\ \left. + \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' [\cos(3k + \omega_1)t + \cos(3k - \omega_1)t] + \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' [\cos(3k + \omega_2)t + \cos(3k - \omega_2)t] \right. \\ \left. + \left[\frac{\gamma}{2k} M_2^3 + H M_1 + \frac{3\gamma}{4k} M_2 (a'^2 + b'^2) \right] \cos 2kt - \frac{3\gamma}{4k} M_2 a'^2 \cos 2\omega_1 t - \frac{3\gamma}{4k} M_2 b'^2 \cos 2\omega_2 t - \right. \\ \left. - \frac{3\gamma}{2k} M_2 a' b' [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \right. \\ \left. + \frac{3\gamma}{8k} M_2 a'^2 [\cos 2(k + \omega_1)t + \cos 2(k - \omega_1)t] + \frac{3\gamma}{8k} M_2 b'^2 \right. \\ \left. [\cos 2(k + \omega_2)t + \cos 2(k - \omega_2)t] + \frac{3\gamma}{4k} M_2 a' b' [\cos(2k + \omega_1 + \omega_2)t + \cos(2k - \omega_1 - \omega_2)t + \right. \\ \left. \cos(2k + \omega_1 - \omega_2)t + \cos(2k - \omega_1 + \omega_2)t] + \left[-\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' + H \bar{a} \right] \cos(k + \omega_1)t - \right. \\ \left. \left(\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' + H \bar{a} \right) \cos(k - \omega_1)t + \left(-\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' + H \bar{b} \right) \cos(k + \omega_2)t - \left(\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' + \right. \right. \\ \left. \left. H \bar{b} \right) \cos(k - \omega_2)t \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + H \bar{b}) \cos(k - \omega_2)t + \frac{\delta}{8k} M_1 (3M_2^2 - M_1^2) \sin 4kt - \frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) a' [\sin(3k + \omega_1)t + \sin(3k - \omega_1)t] \\
 & - \frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) b' [\sin(3k + \omega_2)t + \sin(3k - \omega_2)t] + \left[\frac{\delta}{4k} M_1 (M_1^2 + 3M_2^2) + H M_2 - \right. \\
 & \left. \frac{3\gamma}{4k} M_1 (a'^2 + b'^2) \right] \cdot \sin 2k - \frac{3\gamma}{8k} M_1 a'^2 [\sin 2(k + \omega_1)t + \sin 2(k - \omega_1)t] - \frac{3\gamma}{8k} M_1 b'^2 \\
 & [\sin 2(k + \omega_2)t + \sin 2(k - \omega_2)t] - \frac{3\gamma}{4k} M_1 a' b' [\sin(2k + \omega_1 + \omega_2)t + \sin(2k - \omega_1 - \omega_2)t \\
 & + \sin(2k + \omega_1 - \omega_2)t + \sin(2k - \omega_1 + \omega_2)t] - \frac{3\gamma}{8k} a' (M_1^2 + 3M_2^2 + a'^2 + 2b'^2) [\sin(k + \omega_1)t \\
 & + \sin(k - \omega_1)t] - \frac{3\gamma}{8k} b' (M_1^2 + 3M_2^2 + 2a'^2 + b'^2) [\sin(k + \omega_2)t + \sin(k - \omega_2)t] - \frac{\delta}{8k} a'^3 \\
 & [\sin(k + 3\omega_1)t + \sin(k - 3\omega_1)t] - \frac{\delta}{8k} b'^3 [\sin(k + 3\omega_2)t + \sin(k - 3\omega_2)t] - \frac{3\gamma}{8k} a'^2 b' \\
 & [\sin(k + 2\omega_1 + \omega_2)t + \sin(k - 2\omega_1 - \omega_2)t + \sin(k + 2\omega_1 - \omega_2)t + \sin(k - 2\omega_1 \\
 & + \omega_2)t] - \frac{3\gamma}{8k} a' b'^2 [\sin(k + 2\omega_2 + \omega_1)t + \sin(k - 2\omega_2 - \omega_1)t + \sin(k + 2\omega_2 - \omega_1)t \\
 & + \sin(k - 2\omega_2 + \omega_1)t] \}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_2}{dt} = \mu \left\{ \left[\frac{3\gamma}{8k} M_1 (M_1^2 + M_2^2) - H M_2 + \frac{3\gamma}{8k} M_1 (a'^2 + b'^2) \right] + \frac{\delta}{8k} M_1 (M_1^2 - 3M_2^2) \cos 4k + \frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) \right. \\
 a' [\cos(3k + \omega_1)t + \cos(3k - \omega_1)t] + \frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) b' [\cos(3k + \omega_2)t + \cos(3k - \omega_2)t] + \left[\frac{\delta}{2k} M_1^3 \right. \\
 \left. - H M_2 + \frac{3\gamma}{4k} M_1 (a'^2 + b'^2) \right] \cos 2kt + \frac{3\gamma}{4k} M_1 a'^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{3\gamma}{4k} M_1 b'^2 \\
 \cos 2\omega_2 t + \frac{3\gamma}{2k} M_1 a' b' [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] + \frac{3\gamma}{8k} M_1 a'^2 [\cos 2(k + \omega_1)t + \\
 + \cos 2(k - \omega_1)t] + \frac{3\gamma}{8k} M_1 b'^2 [\cos 2(k + \omega_2)t + \cos 2(k - \omega_2)t] + \frac{3\gamma}{4k} M_1 a' b' [\cos(2k + \omega_1 + \omega_2)t \\
 + \cos(2k - \omega_1 - \omega_2)t + \cos(2k + \omega_1 - \omega_2)t + \cos(2k - \omega_1 + \omega_2)t] + \frac{3\gamma}{8k} a' (3M_1^2 + M_2^2 + a'^2 + 2b'^2) \\
 [\cos(k + \omega_1)t + \cos(k - \omega_1)t] + \frac{3\gamma}{8k} b' (3M_1^2 + M_2^2 + 2a'^2 + b'^2) [\cos(k + \omega_2)t + \cos(k - \omega_2)t] + \\
 \left. + \frac{\delta}{8k} a'^3 [\cos(k + 3\omega_1)t + \cos(k - 3\omega_1)t] + \frac{\delta}{8k} b'^3 [\cos(k + 3\omega_2)t + \cos(k - 3\omega_2)t] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3\gamma}{8k} a^{12} b' [\cos(k+2\omega_1+\omega_2)t + \cos(k-2\omega_1-\omega_2)t + \cos(k+2\omega_1-\omega_2)t + \cos(k-2\omega_1+\omega_2)t] + \frac{3\gamma}{8k} a^{11} b^{12} \\
 & [\cos(k+2\omega_2+\omega_1)t + \cos(k-2\omega_2-\omega_1)t + \cos(k+2\omega_2-\omega_1)t + \cos(k-2\omega_2+\omega_1)t] + \\
 & \frac{\gamma}{8k} M_2 [3M_1^2 - M_2^2] \sin 4kt + \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' [\sin(3k+\omega_1)t + \sin(3k-\omega_1)t] + \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' \\
 & [\sin(3k+\omega_2)t + \sin(3k-\omega_2)t] + [\frac{\gamma}{4k} M_2 (3M_1^2 + M_2^2) + H M_1 + \frac{3\gamma}{4k} M_2 (a^{12} + b^{12})] \sin 2kt \\
 & + \frac{3\gamma}{8k} M_2 a^{12} [\sin 2(k+\omega_1)t + \sin 2(k-\omega_1)t] + \frac{3\gamma}{8k} M_2 b^{12} [\sin 2(k+\omega_2)t + \sin 2(k-\omega_2)t] \\
 & + \frac{3\gamma}{4k} M_2 a' b' [\sin(2k+\omega_1+\omega_2)t + \sin(2k-\omega_1-\omega_2)t + \sin(2k+\omega_1-\omega_2)t + \sin(2k-\omega_1+\omega_2)t] \\
 & + [\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' + H \bar{a}] \sin(k+\omega_1)t + [\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 a' - H \bar{a}] \sin(k-\omega_1)t + \\
 & [\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' + H \bar{b}] \sin(k+\omega_2)t + [\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 b' - H \bar{b}] \sin(k-\omega_2)t
 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, les équations (3.10) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_1}{dt} &= \mu \left\{ P_1(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{34} [A_{1p}(M_1, M_2) \cos \gamma_p t + B_{1p}(M_1, M_2) \sin \gamma_p t] \right\} = \mu F_1(t, M_1, M_2) \\
 (3.11) \quad \frac{dM_2}{dt} &= \mu \left\{ P_2(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{34} [A_{2p}(M_1, M_2) \cos \gamma_p t + B_{2p}(M_1, M_2) \sin \gamma_p t] \right\} = \mu F_2(t, M_1, M_2)
 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
 P_1(M_1, M_2) &= - \frac{3\gamma}{8k} M_2 (M_1^2 + M_2^2) - H M_1 - \frac{3\gamma}{4k} M_2 \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \right. \\
 (3.12) \quad & \left. + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$P_2(M_1, M_2) = \frac{3\gamma}{8k} M_1 (M_1^2 + M_2^2) - H M_2 + \frac{3\gamma}{4k} M_1 \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right]$$

(3.13)

$$A_{11} = \frac{\gamma}{8k} M_2 (3 M_1^2 - M_2^2)$$

$$B_{11} = \frac{\gamma}{8k} M_1 (3 M_2^2 - M_1^2)$$

$$A_{12} = A_{13} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{a}{k^2 - \omega_1^2}$$

$$B_{12} = B_{13} = -\frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) \frac{a}{k^2 - \omega_1^2}$$

$$A_{14} = A_{15} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{b}{k^2 - \omega_2^2}$$

$$B_{14} = B_{15} = -\frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) \frac{b}{k^2 - \omega_2^2}$$

$$A_{16} = \frac{\gamma}{2k} M_2^3 + H M_1 + \frac{3\gamma}{4k} M_2 \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right]$$

$$A_{17} = -\frac{3\gamma}{4k} M_2 \frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2}$$

$$B_{16} = -\frac{\gamma}{4k} M_1 (M_1^2 + 3 M_2^2) + H M_2 -$$

$$A_{18} = -\frac{3\gamma}{4k} M_2 \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2}$$

$$-\frac{3\gamma}{4k} M_1 \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right]$$

$$A_{19} = A_{1,10} = -\frac{3\gamma}{2k} M_2 \frac{ab}{(k^2 - \omega_1^2)(k^2 - \omega_2^2)}$$

$$B_{17} = B_{18} = B_{19} = B_{1,10} = 0$$

$$A_{1,11} = A_{1,12} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 \frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2}$$

$$B_{1,11} = B_{1,12} = -\frac{3\gamma}{8k} M_1 \frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2}$$

$$A_{1,13} = A_{1,14} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2}$$

$$B_{1,13} = B_{1,14} = -\frac{3\gamma}{8k} M_1 \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2}$$

$$A_{1,15} = A_{1,16} = A_{1,17} = A_{1,18} = \frac{3\gamma}{4k} M_2 \frac{ab}{(k^2 - \omega_1^2)(k^2 - \omega_2^2)}$$

$$A_{1,19} = -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} + H \frac{a \omega_1}{k(k^2 - \omega_1^2)}$$

$$B_{1,15} = B_{1,16} = B_{1,17} = B_{1,18} = -\frac{3\gamma}{4k} M_1 \frac{ab}{(k^2 - \omega_1^2)(k^2 - \omega_2^2)}$$

$$A_{1,20} = -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} - H \frac{a \omega_1}{k(k^2 - \omega_1^2)}$$

$$B_{1,19} = B_{1,20} = -\frac{3\gamma}{8k} \frac{a}{(k^2 - \omega_1^2)} \left[M_1^2 + 3 M_2^2 + \frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{2b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right]$$

$$A_{1,21} = -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} + H \frac{b \omega_2}{k(k^2 - \omega_2^2)}$$

$$A_{1,22} = -\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} - H \frac{b \omega_2}{k(k^2 - \omega_2^2)}$$

$$B_{1,21} = B_{1,22} = -\frac{3\gamma}{8k} \frac{b}{(k^2 - \omega_2^2)} \left[M_1^2 + 3 M_2^2 + \frac{2a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right]$$

$$A_{1,23} = A_{1,24} = A_{1,25} = A_{1,26} = 0$$

$$A_{1,27} = A_{1,28} = A_{1,29} = A_{1,30} = 0$$

$$B_{1,23} = B_{1,24} = -\frac{\gamma}{8k} \frac{a^2}{(k - \omega_1)^3}$$

$$A_{1,31} = A_{1,32} = A_{1,33} = A_{1,34} = 0$$

$$(3 \ 13^0)$$

$$A_{21} = \frac{\gamma}{8k} M_L (M_1^2 - 3M_2^2)$$

$$A_{22} = A_{23} = \frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) \frac{a}{k^2 - \omega_1^2}$$

$$A_{24} = A_{25} = \frac{3\gamma}{8k} (M_1^2 - M_2^2) \frac{b}{k^2 - \omega_1^2}$$

$$A_{26} = \frac{\gamma}{2k} M_1^3 - 11M_2 + \frac{3\gamma}{4k} M_L \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_1)^2} \right]$$

$$A_{27} = \frac{3\gamma}{4k} M_L \frac{a^2}{(k^2 - \omega_1)^2}$$

$$A_{28} = \frac{3\gamma}{4k} M_L \frac{b^2}{(k^2 - \omega_1)^2}$$

$$A_{29} = A_{2,10} = \frac{3\gamma}{2k} M_L \frac{ab}{(k^2 - \omega_1)(k^2 - \omega_2)}$$

$$A_{2,11} = A_{2,12} = \frac{3\gamma}{8k} M_L \frac{a^2}{(k^2 - \omega_1)^2}$$

$$A_{2,13} = A_{2,14} = \frac{3\gamma}{8k} M_L \frac{b^2}{(k^2 - \omega_1)^2}$$

$$A_{2,15} = A_{2,16} = A_{2,17} = A_{2,18} = \frac{3\gamma}{4k} M_L \frac{ab}{(k^2 - \omega_1)(k^2 - \omega_2)}$$

$$A_{2,19} = A_{2,20} = \frac{3\gamma}{8k} \frac{a}{(k^2 - \omega_1)^2} \left[3M_L + M_2^2 + \frac{a^2}{(k^2 - \omega_1)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_1)^2} \right]$$

$$A_{2,21} = A_{2,22} = \frac{3\gamma}{8k} \frac{b}{(k^2 - \omega_1)^2} \left[3M_L + M_2^2 + \frac{2a^2}{(k^2 - \omega_1)^2} + \frac{b^2}{k^2 - \omega_1} \right]$$

$$A_{2,23} = A_{2,24} = \frac{\gamma}{8k} \frac{a^3}{(k^2 - \omega_1)^3}$$

$$A_{2,25} = A_{2,26} = \frac{\gamma}{8k} \frac{b^3}{(k^2 - \omega_1)^3}$$

$$A_{2,27} = A_{2,28} = A_{2,29} = A_{2,30} = \frac{3\gamma}{8k} \frac{a^2 b}{(k^2 - \omega_1)(k^2 - \omega_2)}$$

$$A_{2,31} = A_{2,33} =$$

$$= A_{2,32} = A_{2,34} = \frac{3\gamma}{8k} \frac{ab^2}{(k^2 - \omega_1)(k^2 - \omega_2)^2}$$

$$B_{1,25} = B_{1,26} = -\frac{\gamma}{8k} \frac{b^3}{(k^2 - \omega_1)^3}$$

$$B_{1,27} = B_{1,28} = B_{1,29} = B_{1,30} = -\frac{3\gamma}{8k} \frac{a^2 b}{(k^2 - \omega_1)^2 (k^2 - \omega_2)}$$

$$B_{1,31} = B_{1,32} = B_{1,33} = B_{1,34} = -\frac{3\gamma}{8k} \frac{ab^2}{(k^2 - \omega_1)(k^2 - \omega_2)^2}$$

$$B_{21} = \frac{\gamma}{8k} M_L (3M_1^2 - M_2^2)$$

$$B_{22}=B_{23}=\frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{a}{k^2-\omega_1^2}$$

$$B_{24} = B_{25} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{b}{k^2-\omega_1^2}$$

$$B_{26} = \frac{\gamma}{4k} M_2 (3M_1^2 + M_1^2) + H M_1 + \frac{3\gamma}{4k} M_2 \left[\frac{a^2}{(k^2-\omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2-\omega_1^2)^2} \right]$$

$$B_{27} = B_{28} = B_{29} = B_{210} = 0$$

$$B_{211} = B_{212} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 \frac{a^2}{(k^2-\omega_1^2)^2}$$

$$B_{213} = B_{214} = \frac{3\gamma}{8k} M_2 \frac{b^2}{(k^2-\omega_1^2)^2}$$

$$B_{215} = B_{216} = B_{217} = B_{218} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 \frac{ab}{(k^2-\omega_1^2)(k^2-\omega_2^2)}$$

$$B_{219} = B_{220} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{a}{k^2-\omega_1^2} + H \frac{a\omega_1}{k(k^2-\omega_1^2)}$$

$$B_{221} = B_{222} = \frac{3\gamma}{4k} M_1 M_2 \frac{b}{k^2-\omega_2^2} + H \frac{b\omega_2}{k(k^2-\omega_2^2)}$$

$$B_{223} = B_{224} = B_{225} = B_{226} = 0$$

$$B_{227} = B_{228} = B_{229} = B_{230} = 0$$

$$B_{231} = B_{232} = B_{234} = 0$$

$$\begin{array}{lll}
 \nu_1 = 4k & \nu_{12} = 2(k - \omega_1) & \nu_{23} = k + 3\omega_1 \\
 \nu_2 = 3k + \omega_1 & \nu_{13} = 2(k + \omega_2) & \nu_{24} = k - 3\omega_1 \\
 \nu_3 = 3k - \omega_1 & \nu_{14} = 2(k - \omega_2) & \nu_{25} = k + 3\omega_2 \\
 \nu_4 = 3k + \omega_2 & \nu_{15} = 2k + \omega_1 + \omega_2 & \nu_{26} = k - 3\omega_2 \\
 \nu_5 = 3k - \omega_2 & \nu_{16} = 2k - \omega_1 - \omega_2 & \nu_{27} = k + 2\omega_1 + \omega_2 \\
 \nu_6 = 2k & \nu_{17} = 2k + \omega_1 - \omega_2 & \nu_{28} = k - 2\omega_1 - \omega_2 \\
 \nu_7 = 2\omega_1 & \nu_{18} = 2k - \omega_1 + \omega_2 & \nu_{29} = k + 2\omega_1 - \omega_2 \\
 \nu_8 = 2\omega_2 & \nu_{19} = k + \omega_1 & \nu_{30} = k - 2\omega_1 + \omega_2 \\
 \nu_9 = \omega_1 + \omega_2 & \nu_{20} = k - \omega_1 & \nu_{31} = k + 2\omega_2 + \omega_1 \\
 \nu_{10} = \omega_1 - \omega_2 & \nu_{21} = k + \omega_2 & \nu_{32} = k - 2\omega_2 - \omega_1 \\
 \nu_{11} = 2(k + \omega_1) & \nu_{22} = k - \omega_2 & \nu_{33} = k + 2\omega_2 - \omega_1 \\
 & & \nu_{34} = k - 2\omega_2 + \omega_1
 \end{array}$$

On remarque que les fonctions F_1 et F_2 - Voir les équations (3.11) - sont des sommes trigonométriques finies.

On cherchera ensuite à trouver les solutions presque-périodiques du système standard (3.11). Dans ce but, on fera un changement de variables pour transformer le système (3.11) dans un système de la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= \mu Y_1(y_1, y_2) + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu) \\
 \frac{dy_2}{dt} &= \mu Y_2(y_1, y_2) + \mu^2 Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu)
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

où Y_1 et Y_2 sont des fonctions qui ne contiennent pas le temps, et Y_1^* , Y_2^* ont la même structure que F_1 et F_2 ,

c'est-à-dire qu'elles peuvent être mises sous la forme de sommes trigonométriques finies dont les coefficients sont des polynômes en y_1 et y_2 . Les fonctions Y_1^* et Y_2^* dépendent aussi du paramètre μ , par rapport auquel elles sont analytiques.

N.M. KRYLOV et N.N. BOBOLJUBOV ont démontré qu'on peut faire cette transformation, en faisant, dans le système (3.11), la substitution :

$$(3.16) \quad M_1 = y_1 + \mu u_1(t, y_1, y_2)$$

$$M_2 = y_2 + \mu u_2(t, y_1, y_2)$$

En effet, en remplaçant dans les (3.11) M_1 et M_2 par leurs expressions (3.16) et en tenant compte de (3.15), on aura :

$$(3.17) \quad \mu \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mu Y_1 + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, 0) + \mu^3 Y_1^{**}(t, y_1, y_2, \mu) = -\mu \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \\ \left[\mu Y_1 + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu) \right] - \mu \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \left[\mu Y_2 + \mu^2 Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu) + \mu F_2(t, y_1, y_2) + \right. \\ \left. \mu^2 \left[\frac{\partial F_1}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} u_2 \right] + \mu^3 F_1^*(t, y_1, y_2, \mu) \right] \parallel \mu \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mu Y_2 + \mu^2 Y_2^*(t, y_1, y_2, 0) + \\ \mu^3 Y_2^{**}(t, y_1, y_2, \mu) = -\mu \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \left[\mu Y_1 + \mu^2 Y_1^*(t, y_1, y_2, \mu) \right] - \mu \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \left[\mu Y_2 + \right. \\ \left. + \mu^2 Y_2^*(t, y_1, y_2, \mu) + \mu F_2(t, y_1, y_2) + \mu^2 \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} u_2 \right] + \mu^3 F_2^*(t, y_1, y_2, \mu) \right]$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de μ on obtient les équations qui nous permettent de calculer les fonctions inconnues u_1 , u_2 , Y_0 , Y_2 , Y_1^* et Y_2^* :

$$(3.18) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + Y_1 = F_1(t, y_1, y_2) = P_1(y_1, y_2) + \sum_{p=1}^{34} \left[A_{1p}(y_1, y_2) \cos \nu_p t + \right. \\ \left. + B_{1p}(y_1, y_2) \sin \nu_p t \right] \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + Y_2 = F_2(t, y_1, y_2) = P_2(y_1, y_2) + \sum_{p=1}^{34} \left[A_{2p}(y_1, y_2) \cos \nu_p t + \right. \\ \left. + B_{2p}(y_1, y_2) \sin \nu_p t \right]$$

$$(3.19) \quad \begin{aligned} Y_1^* (t, y_1, y_2, 0) &= - \frac{\partial u_1}{\partial y_1} Y_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} Y_2 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} u_2 \\ Y_2^* (t, y_1, y_2, 0) &= - \frac{\partial u_2}{\partial y_1} Y_1 - \frac{\partial u_2}{\partial y_2} Y_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} u_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} u_2 \end{aligned}$$

$$(3.20) \quad \begin{aligned} Y_1^{**} (t, y_1, y_2, \mu) &= - \frac{\partial u_1}{\partial y_1} Y_1^* (t, y_1, y_2, \mu) - \frac{\partial u_1}{\partial y_2} Y_2^* (t, y_1, y_2, \mu) + \\ &\quad + F_1^{**} (t, y_1, y_2, \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2^{**} (t, y_1, y_2, \mu) &= - \frac{\partial u_2}{\partial y_1} Y_1^* (t, y_1, y_2, \mu) - \frac{\partial u_2}{\partial y_2} Y_2^* (t, y_1, y_2, \mu) + \\ &\quad + F_2^{**} (t, y_1, y_2, \mu) \end{aligned}$$

On remarque que les équations (3.18) sont satisfaites si l'on prend :

$$(3.21) \quad \begin{aligned} u_1 (t, y_1, y_2) &= \sum_{p=1}^{34} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} = J \{ F_1 (t, y_1, y_2) \} \\ u_2 (t, y_1, y_2) &= \sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} = J \{ F_2 (t, y_1, y_2) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1 (y_1, y_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F_1 (t, y_1, y_2) dt = M \{ F_1 (t, y_1, y_2) \} = \\ &= P_1 (y_1, y_2) \\ Y_2 (y_1, y_2) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F_2 (t, y_1, y_2) dt = M \{ F_2 (t, y_1, y_2) \} = \\ &= P_2 (y_1, y_2) \end{aligned}$$

Par conséquent, de (3.19, compte tenu de (3.14), on obtient :

$$(3.22) \quad \begin{aligned} Y_1^* (t, y_1, y_2, 0) &= \sum_{p=1}^{22} \frac{\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t}{\nu_p} P_1 - \sum_{p=1}^{22} \frac{\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t}{\nu_p} P_2 + \\ &+ \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \cos \chi_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \sin \chi_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \chi_p t - B_{2p} \cos \chi_p t}{\chi_p} \right] \\
 Y_2^*(t, y_1, y_2, 0) = & \sum_{p=1}^{22} - \frac{\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \sin \chi_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \cos \chi_p t}{\chi_p} P_1 - \sum_{p=1}^{22} \frac{\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \sin \chi_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \cos \chi_p t}{\chi_p} P_2 \\
 & + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \cos \chi_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \sin \chi_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{1p} \sin \chi_p t - B_{1p} \cos \chi_p t}{\chi_p} \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \cos \chi_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin \chi_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \chi_p t - B_{2p} \cos \chi_p t}{\chi_p} \right]
 \end{aligned}$$

En tenant compte de (3.21) et (3.22), les équations (3.15) s'écrivent :

(3.23)

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} = & \mu P_1(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ - \sum_{p=1}^{22} \frac{\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \sin \chi_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \cos \chi_p t}{\chi_p} P_1 - \right. \\
 & \sum_{p=1}^{22} \frac{\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \sin \chi_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \cos \chi_p t}{\chi_p} P_2 + \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \cos \chi_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \sin \chi_p t \right) \right] \cdot \\
 & \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{1p} \sin \chi_p t - B_{1p} \cos \chi_p t}{\chi_p} \right] + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \cos \chi_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin \chi_p t \right) \right] \cdot \\
 & \left. \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \chi_p t - B_{2p} \cos \chi_p t}{\chi_p} \right] \right\} + \mu^3 Y_2^{***}(t, y_1, y_2, \mu)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} = & \mu P_2(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ - \sum_{p=1}^{22} \frac{\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t}{\nu_p} P_1 - \right. \\ & \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right) \frac{P_2}{\nu_p} + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \\ & \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t + B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] + \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^{22} \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right) \right] \\ & \left. \left[\sum_{p=1}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] + \mu^3 Y_2^{**}(t, y_1, y_2, \mu) \right\} \end{aligned}$$

Considérons maintenant le système (3.23), en première approximation :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \mu P_1(y_1, y_2) = \mu \left[-\frac{3\gamma}{8k} y_2 (y_1^2 + y_2^2) - H y_1 - \delta y_2 \right] \\ (3.24) \quad \frac{dy_2}{dt} &= \mu P_2(y_1, y_2) = \mu \left[\frac{3\gamma}{8k} y_1 (y_1^2 + y_2^2) + \delta y_1 - H y_2 \right] \end{aligned}$$

où l'on a désigné par δ l'expression :

$$(3.25) \quad \delta = \frac{3\gamma}{4k} \left[\frac{a^2}{(k^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{b^2}{(k^2 - \omega_2^2)^2} \right] > 0$$

On remarque que ce système a la solution particulière :

$$\begin{aligned} y_1^* &= 0 \\ (3.26) \quad y_2^* &= 0 \end{aligned}$$

qui correspond à l'état d'équilibre de ce système, c'est-à-dire à l'état pour lequel

$$\begin{aligned} P_1(0, 0) &= 0 \\ (3.27) \quad P_2(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Les équations aux variations, correspondant à la solution (3.26) ont la forme :

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \frac{d \xi_1}{dt} &= -H \xi_1 - \delta \xi_2 \\ \frac{d \xi_2}{dt} &= \delta \xi_1 - H \xi_2 \end{aligned}$$

où on a désigné les perturbations par $y_s - 0 = \mu \xi_s$ ($s = 1, 2$).

On remarque que l'équation déterminante du système aux variations :

$$(3.29) \quad \begin{vmatrix} -H-\lambda & -\delta \\ \delta & -H-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial y_1} - \lambda & \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial y_1} & \frac{\partial P_2}{\partial y_2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2H\lambda + (H^2 + \delta^2) = 0$$

dont les dérivées $\frac{\partial P_s}{\partial y_j}$ ($s, j = 1, 2$) sont calculées pour la solution $y_s = y_s^* = 0$, a les racines

$$(3.30) \quad \lambda_{1,2} = -H \pm \delta i \quad (i = \sqrt{-1})$$

dont les parties réelles diffèrent de zéro et sont négatives car $H > 0$.

Dans ce cas, c'est-à-dire si les conditions (3.27) sont satisfaites⁽¹⁾, on démontrera que le système (3.23) a, pour μ suffisamment petit, une solution presque-périodique qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution (3.26)⁽²⁾.

Dans ce but, on fera la substitution :

$$(3.31) \quad \begin{aligned} y_1 &= \mu z_1 \\ y_2 &= \mu z_2 \end{aligned}$$

Par suite, les équations (3.23) deviennent :

(1) Cette condition (3.27) est seulement suffisante, mais pas nécessaire.

(2) Cette affirmation résulte comme un cas particulier d'un théorème plus général établi par N.N. BOGOLJUBOV.[40]

$$\frac{dz_1}{dt} = \mu (-H z_1 - \delta z_2) + \mu Y_1^*(t, 0, 0, 0) + \mu^2 Z_1(t, z_1, z_2, \mu) \quad (3.32)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \mu (\delta z_1 - H z_2) + \mu Y_2^*(t, 0, 0, 0) + \mu^2 Z_2(t, z_1, z_2, \mu)$$

où, en tenant compte de (3.22), (3.12) et (3.13) :

$$\frac{dz_1}{dt} = \mu (-H z_1 - \delta z_2) + \mu \left\{ [-H + H \cos 2kt - \delta \sin 2kt + \sum_{p=19}^{18} \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t] \right.$$

$$\left. \left[\sum_{p=19}^{34} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right]_{y_1=y_2=0} + \left[-\delta + \delta \cos 2kt + H \sin 2kt + \sum_{p=7}^{18} \frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t \right] \right\} + \mu^2 Z_1(t, z_1, z_2, \mu)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \mu (\delta z_1 - H z_2) + \mu \left\{ [\delta + \delta \cos 2kt + H \sin 2kt + \sum_{p=7}^{18} \frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t] \right.$$

$$\left. \left[\sum_{p=19}^{34} \frac{A_{2p} \sin \nu_p t - B_{2p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right]_{y_1=y_2=0} + \left[-H - H \cos 2kt + \delta \sin 2kt + \sum_{p=11}^{18} \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t \right] \right\} + \mu^2 Z_2(t, z_1, z_2, \mu)$$

où Z_1 et Z_2 sont des fonctions analytiques par rapport à μ et ont la même structure que Y_1^* , Y_2^* . Les fonctions Z_1 , Z_2 convergent pour $\mu < \mu_0$, où μ_0 est un nombre positif qui ne dépend pas de t, z_1, z_2 .

En remplaçant dans les équations (3.32) :

$$(3.35) \quad \tau = \mu t, \quad Y_1^*(t, 0, 0, 0) = f_1(t), \quad Y_2^*(t, 0, 0, 0) = f_2(t)$$

où $f_1(t)$, $f_2(t)$ sont - comme on le remarque dans (3.32) - des fonctions presque-périodiques, on obtiendra :

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= -H z_1 - \delta z_2 + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_1\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu\right) \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \delta z_1 - H z_2 + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_2\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu\right) \end{aligned}$$

Comme il résulte de (3.30), l'équation déterminante du système générateur :

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -H z_1 - \delta z_1 + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \\ \frac{dz_2}{dt} &= \delta z_1 - H z_2 + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \end{aligned}$$

a des racines avec les parties réelles différentes de zéro (négatives), c'est-à-dire non critiques.

Dans ce cas, conformément au théorème de NEIGBAUER et BOHR, le système générateur (3.35) admet une solution presque périodique $z_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = \varphi_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$ ($s = 1, 2$) et une seule, et cette solution satisfait aux inégalités :

$$(3.36) \quad \left| \varphi_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \right| < A M$$

où M est la limite supérieure des fonctions $\left| f_s\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \right|$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et A est une certaine constante, qui dépend seulement des coefficients H et δ et ne dépend pas du choix des fonctions f_s .

Le système homogène (3.35) a la solution générale :

$$z_1(\tau) = e^{-H\tau} (A \cos \delta\tau + B \sin \delta\tau)$$

$$z_2(\tau) = e^{-H\tau} (A \sin \delta\tau - B \cos \delta\tau)$$

En appliquant la méthode de la variation des constantes arbitraires, on remarque que le système générateur (3.35) a une seule solution particulière, presque-périodique :

(3.37)

$$\varphi_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos \delta(u-\tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin \delta(u-\tau) \right] du$$

$$\varphi_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin \delta(u-\tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos \delta(u-\tau) \right] du$$

On cherchera ensuite la solution presque-périodique du système (3.34), qui se ramène pour $\mu = 0$, à la solution génératrice (3.37).

Dans ce but, on utilisera la méthode des approximations successives. Comme première approximation, on prend la solution (3.37) et comme approximation $z_s^{(K)}$, ($s = 1, 2$) des fonctions z_s , on prend la solution presque-périodique du système :

(3.38)

$$\frac{d}{d\tau} z_1^{(K)} = -H z_1^{(K)} - \delta z_2^{(K)} + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu z_1\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^{(K-1)}, z_2^{(K-1)}, \mu\right)$$

$$\frac{d}{d\tau} z_2^{(K)} = \delta z_1^{(K)} - H z_2^{(K)} + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu z_2\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^{(K-1)}, z_2^{(K-1)}, \mu\right)$$

Les équations (3.38) définissent uniquement la suite des fonctions presque-périodiques $z_s^{(K)}$.

Les inégalités (3.36), satisfaites par la solution presque-périodique du système (3.38), permettent de démontrer aisément que la suite $z_s^{(K)}$ converge pour μ suffisamment petit, uniformément vers certaines fonctions presque-périodiques $z_s^*(\tau)$, qui satisfont aux équations (3.34).

La démonstration de la convergence, pour le cas général, se trouve dans l'ouvrage de MALKIN [67, chap. IV, par. 2]. On démontre aussi que la solution ainsi obtenue sera, pour μ assez petit, la seule solution du système (3.34), solution qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution (3.37). (Ce théorème, à l'aide de la transformation $z_s = \varphi_s(\tau) + v_s$; ($s = 1, 2$) s'obtient comme une conséquence d'un théorème plus général établi par N.N. BOGOLJUBOV [40 par. 8]).

Remarque : Dans la démonstration de la convergence des approximations successives $z_s^{(K)}$ [67, chap. IV, par. 9], la limite supérieure des valeurs de $|\mu|$, pour laquelle ces approximations convergent, ne dépend pas du choix particulier des fonctions f_s et z_s , qui figurent dans les équations (3.34), mais elle dépend des limites supérieures des fonctions $|f_s|$, $|z_s|$, $\left| \frac{\partial z_s}{\partial z_j} \right|$ dans un voisinage quelconque de la solution génératrice. C'est pourquoi le fait que la variable τ entre dans les équations (3.34) sous la forme $\frac{\tau}{\mu}$, n'a aucune importance.

Si l'on se borne à la première approximation donnée par (3.37), on trouve que :

$$y_1 = \mu \varphi_1(t)$$

$$y_2 = \mu \varphi_2(t)$$

est la solution presque-périodique du système (3.23), solution qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution (3.26).

En vertu de (3.16), étant donné que les fonctions u_1 et u_2 sont presque-périodiques, il en résulte qu'à la solution ainsi obtenue, correspond une vibration presque-périodique du système (3.11) qui se transforme, pour $\mu = 0$, en état d'équilibre pour le système (3.24) :

$$M_1(t) = \mu \varphi_1(t) + \mu u_1(t, \mu \varphi_1, \mu \varphi_2)$$

$$M_2(t) = \mu \varphi_2(t) + \mu u_2(t, \mu \varphi_1, \mu \varphi_2)$$

Par suite, on obtient la solution presque-périodique du système donné (3.1) :

$$(3.39) \quad x = \frac{a}{k^2 - \omega^2} \cos \omega_1 t + \frac{b}{k^2 - \omega^2} \cos \omega_2 t + \mu \left[\varphi_1(t) \cos kt + \right. \\ \left. + \varphi_2(t) \sin kt \right] + \mu \left[u_1(t, \mu \varphi_1, \mu \varphi_2) \cos kt + \right. \\ \left. + u_2(t, \mu \varphi_1, \mu \varphi_2) \sin kt \right]$$

qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution génératrice presque-périodique :

$$(3.40) \quad x^0 = \frac{a}{k^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{b}{k^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t$$

dans laquelle manque la fréquence k .

Stabilité de solution presque-périodique du système (3.1') :

D'après la nature des changements faits plus haut, on remarque que le problème de stabilité de la solution presque-périodique du système (3.1') est équivalent au même problème pour la solution $z_s^*(\tau)$ du système (3.34). Pour résoudre ce dernier problème, il faut constituer les équations du mouvement troublé. En faisant dans l'équation (3.34) la substitution

$$z_s = z_s^* + v_s$$

on aura :

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \frac{dv_1}{d\tau} &= -H v_1 - \delta v_2 + \mu V_1(\tau, v_1, v_2, \mu) \\ \frac{dv_2}{d\tau} &= \delta v_1 - H v_2 + \mu V_2(\tau, v_1, v_2, \mu) \end{aligned}$$

où

$$(3.42) \quad \begin{aligned} V_1 &= Z_1\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^* + v_1, z_2^* + v_2, \mu\right) - Z_1\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^*, z_2^*, \mu\right) \\ V_2 &= Z_2\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^* + v_1, z_2^* + v_2, \mu\right) - Z_2\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^*, z_2^*, \mu\right) \end{aligned}$$

Soit M la limite supérieure des quantités $\left| \frac{\partial Z_s}{\partial v_j} \right|$ dans le domaine

$$-\infty < \tau < +\infty, \quad |v_s| \leq h, \quad (s = 1, 2)$$

où h est une constante positive. Alors, en vertu de (3.42), dans ce domaine les conditions CAUCHY-LIPSCHITZ seront satisfaites :

$$\mu |V_s(\tau, v_1', v_2', \mu) - V_s(\tau, v_1'', v_2'', \mu)| \leq L \sum_{\alpha=1}^2 |\tau' - \tau''|$$

où la constante $L = \mu M$ sera, pour μ suffisamment petit, aussi petite que nous le voulons.

On remarque aussi que l'équation déterminante de la première approximation ($\mu = 0$) :

$$\frac{dv_1}{d\tau} = -H v_1 - \delta v_2$$

$$\frac{dv_2}{d\tau} = \delta v_1 - H v_2$$

a toutes ses racines à parties réelles négatives.

Par conséquent, toutes les conditions du théorème de LIAPOUNOFF [61] pour la stabilité asymptotique sont remplies (Voir 67, p. 181).

Donc le mouvement z_s^* et, en conséquence, aussi x_2 sont asymptotiquement stables.

IV - SOLUTIONS PRESQUE-PERIODIQUES DE L'EQUATION DE DUFFING A LA RESONANCE.

Supposons que :

$$m K + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 = \mu c$$

soit une quantité petite d'ordre μ .

Supposons, plus précisément, que la quantité k diffère de ω_1 par une quantité d'ordre μ (c'est le cas de la résonance dans le voisinage de la fréquence ω_1). Les choses se développent de façon analogue au cas de la résonance dans le voisinage de la fréquence ω_2 .

Soit donc :

$$(4.1) \quad k^2 = \omega_1^2 - \mu c \quad \text{et} \quad a = \mu \lambda$$

où a et λ sont certaines constantes positives et finies.

Dans ce cas, au lieu de l'équation (3.1), on aura l'équation :

$$(4.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_1^2 x = b \cos \omega_2 t + \mu \lambda \cos \omega_1 t + \mu c x + \mu (\gamma x^3 - 2 H \frac{dx}{dt})$$

En faisant

$x = x_1$, $\dot{x}_1 = -\omega_1 x_2$, l'équation (4.2) s'écrira sous forme du système :

$$(4.2') \quad \frac{dx_1}{dt} = -\omega_1 x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \omega_1 x_1 - \frac{b}{\omega_1} \cos \omega_2 t - \frac{\mu}{\omega_1} (\gamma x_1^3 + 2 H \omega_1 x_2 + c x_1 + \lambda \cos \omega_1 t)$$

Ensuite, on procèdera comme auparavant (par. 3).

On prend, au lieu des fonctions x_1 et x_2 , les quantités M_1 et M_2 définies par les relations :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= M_1 \cos \omega_1 t + M_2 \sin \omega_1 t + \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \\ x_2 &= M_1 \sin \omega_1 t - M_2 \cos \omega_1 t + \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

Alors, le système (4.2), par rapport aux variables M_1 et M_2 , s'écrira :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= - \frac{\mu}{\omega_1} \left[\gamma x_1^3 + 2 H \omega_1 x_2 + c x_1 + \lambda \cos \omega_1 t \right] \sin kt \\ \frac{dM_2}{dt} &= \frac{\mu}{\omega_1} \left[\gamma x_1^3 + 2 H \omega_1 x_2 + c x_1 + \lambda \cos \omega_1 t \right] \cos kt \end{aligned}$$

où x_1 et x_2 doivent être remplacées par leurs expressions (4.3).

En utilisant les résultats du paragraphe précédent (les formules (2.10, (3.14), où $k = \omega_1$ et $a = 0$), on ramène les équations (4.4) à la forme suivante :

(4.5)

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \mu \left\{ \left[- \frac{3\gamma}{8\omega_1} M_2 (M_1^2 + M_2^2) - H M_2 - \left(\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right) M_2 \right] + \frac{\delta}{8\omega_1} M_2 (3M_1^2 - M_2^2) \right. \\ &\quad \cos 4 \omega_1 t + \frac{\gamma}{8\omega_1} M_2 (3M_2^2 - M_1^2) \sin 4 \omega_1 t + \frac{3\gamma}{4\omega_1^2} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} M_1 M_2 [\cos (3\omega_1 + \omega_2)t + \\ &\quad \cos (3\omega_1 - \omega_2)t] - \frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (M_1^2 - M_2^2) [\sin (3\omega_1 + \omega_2)t + \sin (3\omega_1 - \omega_2)t] \\ &\quad \left. + \left[\frac{\gamma}{2\omega_1} M_2^3 + H M_2 + \left(\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right) M_2 \right] \cos 2 \omega_1 t + \left[- \frac{\delta}{4\omega_1} M_2 (M_1^2 + 3M_2^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + H M_2 - \left(\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right) M_2 - \frac{\lambda}{2\omega_1} \right] \sin 2 \omega_1 t - \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} M_2 \right. \\ &\quad \left. \cos 2 \omega_2 t + \frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} M_2 [\cos 2(\omega_1 + \omega_2)t + \cos 2(\omega_1 - \omega_2)t] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} M_1 \left[\sin 2(\omega_1 + \omega_2)t + \sin 2(\omega_1 - \omega_2)t \right] \\
 & + \left[-\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} M_1 M_2 + H \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right] \cos(\omega_1 + \omega_2)t + \\
 & \left[-\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} M_1 M_2 - H \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right] \cos(\omega_1 - \omega_2)t - \\
 & \left[\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left(M_1^2 + 3 M_2^2 + \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right) + \frac{c b}{2\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right] \cdot
 \end{aligned}$$

$$\cdot \left[\sin(\omega_1 + \omega_2)t + \sin(\omega_1 - \omega_2)t \right] - \frac{\gamma}{8\omega_1} \frac{b^3}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^3} \left[\sin(\omega_1 + 3\omega_2)t + \sin(\omega_1 - 3\omega_2)t \right] \}$$

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad \frac{dM_2}{dt} = \mu \left\{ \left[\frac{3\gamma}{8\omega_1} M_1 (M_1^2 + M_2^2) - H M_2 + \left(\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right) M_1 \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\lambda}{2\omega_1} \right] + \frac{\gamma}{8\omega_1} M_1 (M_1^2 - 3M_2^2) \cos 4\omega_1 t + \frac{\gamma}{8\omega_1} M_2 (3M_1^2 - M_2^2) \sin 4\omega_1 t + \right. \\
 \left. \frac{3\gamma}{8\omega_1} (M_1^2 - M_2^2) \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left[\cos(3(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(3\omega_1 - \omega_2)t \right] + \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} M_1 \cdot \right. \\
 \left. M_2 \left[\sin(3\omega_1 + \omega_2)t + \sin(3\omega_1 - \omega_2)t \right] + \left[\frac{\gamma}{2\omega_1} M_1^3 + H M_2 + \right. \right. \\
 \left. \left(\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right) M_1 + \frac{\lambda}{2\omega_1} \right] \cos 2\omega_1 t + \left[\frac{\gamma}{4\omega_1} M_2 (3M_1^2 + M_2^2) \right. \right. \\
 \left. \left. + H M_1 + \left(\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right) M_1 \right] \sin 2\omega_1 t + \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} M_1 \cos 2\omega_1 t \right. \\
 \left. + \frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} M_1 \left[\cos 2(\omega_1 + \omega_2)t + \cos 2(\omega_1 - \omega_2)t \right] + \right. \\
 \left. \frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} M_2 \left[\sin 2(\omega_1 + \omega_2)t + \sin 2(\omega_1 - \omega_2)t \right] + \left[\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right. \right. \\
 \left. \left(3M_1^2 + M_2^2 + \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right) + \frac{c b}{2\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right] \left[\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t \right] \\
 \left. + \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cdot M_1 M_2 + H \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right] \sin(\omega_1 + \omega_2)t + \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} M_1 M_2 - H \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right] \right. \\
 \left. \cdot \sin(\omega_1 - \omega_2)t + \frac{\gamma}{8\omega_1} \frac{b^3}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^3} \left[\cos(\omega_1 + 3\omega_2)t + \cos(\omega_1 - 3\omega_2)t \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture, on peut écrire les équations (4.5) sous la forme :

$$(4.6) \quad \frac{dM_1}{dt} = \mu \left\{ P_1(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{11} \left[A_{1p}(M_1, M_2) \cos \vartheta_p t + B_{1p}(M_1, M_2) \sin \vartheta_p t \right] \right\} = \mu F_1(t, M_1, M_2)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \mu \left\{ P_2(M_1, M_2) + \sum_{p=1}^{11} \left[A_{2p}(M_1, M_2) \cos \vartheta_p t + B_{2p}(M_1, M_2) \sin \vartheta_p t \right] \right\} = \mu F_2(t, M_1, M_2)$$

cù :

$$(4.7) \quad \begin{cases} P_1(M_1, M_2) = -\frac{3\gamma}{8\omega_1} M_2 (M_1^2 + M_2^2) - H M_1 - \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right] M_2 \\ P_2(M_1, M_2) = \frac{3\gamma}{8\omega_1} M_1 (M_1^2 + M_2^2) - H M_2 + \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right] M_1 + \frac{\lambda}{2\omega_1} \end{cases}$$

$$A_{11} = \frac{\gamma}{8\omega_1} M_2 (3M_1^2 - M_2^2)$$

$$B_{11} = \frac{\gamma}{8\omega_1} M_1 (3M_2^2 - M_1^2)$$

$$A_{12} = A_{13} = \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} M_1 M_2$$

$$B_{12} = B_{13} = -\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} (M_1^2 - M_2^2)$$

$$A_{14} = \frac{\gamma}{2\omega_1} M_2^3 + H M_1 + \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right] M_2$$

$$B_{14} = -\frac{\gamma}{4\omega_1} M_1 (M_1^2 + 3M_2^2) + H M_2 - \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right] M_1 - \frac{\lambda}{2\omega_1}$$

$$A_{15} = -\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} M_2$$

$$B_{15} = 0$$

$$A_{16}=A_{17}=\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} M_2$$

$$B_{16}=B_{17}=\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} M_1$$

$$A_{18} = -\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2-\omega_2^2} M_1 M_2 \pm$$

$$4,9 \quad \pm H \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2-\omega_2^2)}$$

$$B_{18}=B_{19}=-\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2-\omega_2^2} \cdot$$

$$\cdot \left[M_1^2 + 3M_2^2 + \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} \right] -$$

$$-\frac{c b}{2\omega_1 (\omega_1^2-\omega_2^2)}$$

$$A_{1,10} = A_{1,11} = 0$$

$$B_{1,10}=B_{1,11}=-\frac{\gamma}{8\omega_1} \frac{b^3}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^3}$$

(4.8)

$$A_{21}=\frac{\gamma}{8\omega_1} M_1 (M_1^2-3 M_2^2)$$

$$B_{21}=\frac{\gamma}{8\omega_1} M_2 (3 M_1^2- M_2^2)$$

$$A_{22}=A_{23}=\frac{3\gamma}{8\omega_1} (M_1^2-M_2^2) \frac{b}{\omega_1^2-\omega_2^2}$$

$$B_{22}=B_{23}=\frac{3\gamma}{4\omega_1} \cdot \frac{b}{\omega_1^2-\omega_2^2} M_1 M_2$$

$$A_{24}=\frac{\gamma}{2\omega_1} M_1^3 - H M_2 + \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right] M_1 + \frac{\lambda}{2\omega_1} ;$$

$$B_{24}=\frac{\gamma}{4\omega_1} M_2 (3 M_1^2+M_2^2) + H M_1 +$$

$$+ \left[\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} \right] M_1$$

$$A_{25}=\frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} M_1$$

$$B_{25}=0$$

$$A_{26}=A_{27}=\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} M_1$$

$$B_{26}=B_{27}=\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} M_2$$

$$A_{28}=A_{29}=\frac{3\gamma}{8\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2-\omega_2^2} \left[3M_1^2+M_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2} \right] + \frac{c b}{2\omega_1 (\omega_1^2-\omega_2^2)}$$

$$B_{28}= = \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{b}{\omega_1^2-\omega_2^2} M_1 M_2 \pm$$

$$B_{29} \quad \pm H \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2-\omega_2^2)}$$

$$A_{2,10}=A_{2,11}=\frac{\gamma}{8\omega_1} \frac{b^3}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^3} ; B_{2,10} = B_{2,11} = 0$$

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \nu_1 &= 4 \omega_1 & \nu_7 &= 2 (\omega_1 - \omega_2) \\ \nu_2 &= 3 \omega_1 + \omega_2 & \nu_8 &= \omega_1 + \omega_2 \\ \nu_3 &= 3 \omega_1 - \omega_2 & \nu_9 &= \omega_1 - \omega_2 \\ \nu_4 &= 2 \omega_1 & \nu_{10} &= \omega_1 + 3\omega_2 \\ \nu_5 &= 2 \omega_2 & \nu_{11} &= \omega_1 - 3\omega_2 \\ \nu_6 &= 2 (\omega_1 + \omega_2) \end{aligned}$$

Dans les mêmes conditions qu'au paragraphe 3, à l'aide de la substitution

$$(4.10) \quad \begin{cases} M_1 = y_1 + \mu u_1(t, y_1, y_2) \\ M_2 = y_2 + \mu u_2(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

le système (4.6) se ramène au système :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \mu Y_1(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ Y_1^*(t, y_1, y_2, 0) + \mu Y_1^{**}(t, y_1, y_2, \mu) \right\} \\ \frac{dy_2}{dt} &= \mu Y_2(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ Y_2^*(t, y_1, y_2, 0) + \mu Y_2^{**}(t, y_1, y_2, \mu) \right\} \end{aligned}$$

ou

$$(4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \mu P_1(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ - \sum_{p=1}^9 \frac{\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t}{\nu_p} P_1 + \sum_{p=1}^9 \frac{\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \sin \nu_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \cos \nu_p t}{\nu_p} P_2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^9 \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_1} \cos \nu_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \sin \nu_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{11} \frac{A_{1p} \sin \nu_p t - B_{1p} \cos \nu_p t}{\nu_p} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{\partial P_1}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^g \left(\frac{\partial A_{1p}}{\partial y_2} \cos v_p t + \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_2} \sin v_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{11} \frac{A_{2p} \sin v_p t - B_{2p} \cos v_p t}{v_p} \right] + \mu^2 Y_1^{**}(t, y_1, y_2, \mu)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \mu P_2(y_1, y_2) + \mu^2 \left\{ - \sum_{p=1}^g \frac{\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \sin v_p t - \frac{\partial B_{1p}}{\partial y_1} \cos v_p t}{v_p} P_1 - \sum_{p=1}^g \frac{\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \sin v_p t - \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \cos v_p t}{v_p} P_2 + \right.$$

$$+ \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_1} + \sum_{p=1}^g \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_1} \cos v_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_1} \sin v_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{11} \frac{A_{1p} \sin v_p t - B_{1p} \cos v_p t}{v_p} \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial P_2}{\partial y_2} + \sum_{p=1}^g \left(\frac{\partial A_{2p}}{\partial y_2} \cos v_p t + \frac{\partial B_{2p}}{\partial y_2} \sin v_p t \right) \right] \left[\sum_{p=1}^{11} \frac{A_{2p} \sin v_p t - B_{2p} \cos v_p t}{v_p} \right] \left. \right\} + \mu^2 Y_2^{**}(t, y_1, y_2, \mu)$$

Considérons le système (4.12) en première approximation :

$$(4.13) \quad \frac{dy_1}{dt} = \mu P_1(y_1, y_2) = \mu \left[- \frac{3\gamma}{8\omega_1} y_2 (y_1^2 - y_2^2) - H y_1 - \delta y_2 \right]$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \mu P_2(y_1, y_2) = \mu \left[\frac{3\gamma}{8\omega_1} y_1 (y_1^2 - y_2^2) + \delta y_1 - H y_2 + \frac{\lambda}{2\omega_1} \right]$$

où

$$(4.14) \quad \delta = \frac{3\gamma}{4\omega_1} \frac{h^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} + \frac{c}{2\omega_1} > 0$$

On montre facilement que le système (4.13) admet la solution particulière suivante :

$$(4.15) \quad \begin{cases} y_1 = y_1^0 = - y_2^0 \left(\alpha y_2^0 + \delta \right) \frac{1}{H} \\ y_2 = y_2^0 \end{cases}$$

où y_2^0 est une racine de l'équation cubique :

$$(4.16) \quad P(y_2^0) = - \frac{\alpha^2}{H} y_2^{0^3} - \frac{2\alpha\delta}{H} y_2^{0^2} - \left(\frac{\delta^2}{H^2} + H \right) y_2^0 + \frac{\lambda}{2\omega_1} = 0$$

où on a désigné par α la quantité

$$(4.17) \quad \alpha = \frac{3\delta\lambda}{16\omega_1^2 H}$$

La solution (4.15) correspond à l'état de l'équilibre du système (4.13), c'est-à-dire :

$$(4.18) \quad P_1(y_1^0, y_2^0) = 0$$

$$P_2(y_1^0, y_2^0) = 0$$

En effet, des équations

$$\begin{array}{l|l} - \frac{3\delta}{8\omega_1} y_2 (y_1^2 + y_2^2) - H y_1 - \delta y_2 = 0 & y_1 \\ \frac{3\delta}{8\omega_1} y_1 (y_1^2 + y_2^2) + \delta y_1 - H y_2 + \frac{\lambda}{2\omega_1} = 0 & y_2 \end{array}$$

en multipliant la première équation par y_1 , la deuxième par y_2 et en additionnant, on trouve :

$$- H (y_1^2 + y_2^2) + \frac{\lambda}{2\omega_1} y_2 = 0$$

De là :

$$(4.19) \quad y_1^2 + y_2^2 = \frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2$$

En introduisant dans (4.18) l'expression (4.19), on obtient le système :

$$(4.20) \quad \begin{cases} -\alpha y_2^2 - H y_1 - \int y_2 = 0 \\ \alpha y_1 y_2 + \int y_1 - H y_2 + \frac{\lambda}{2\omega_1} = 0 \end{cases}$$

De la première équation (4.20), on trouve :

$$(4.21) \quad y_1 = -\frac{1}{H} y_2 (\alpha y_2 + \int)$$

qui, reporté dans la deuxième équation (4.20), conduit à l'équation cubique :

$$(4.22) \quad P(y_2) \equiv -\frac{\alpha^2}{H} y_2^3 - 2\frac{\alpha\int}{H} y_2^2 - \left(\frac{\int^2}{H} + H\right) y_2 + \frac{\lambda}{2\omega_1} =$$

$$= -\frac{y_2}{H} \left[(\alpha y_2 + \int)^2 + H^2 \right] + \frac{\lambda}{2\omega_1} = 0$$

Cette équation (4.22), comme on le voit dans l'expression du terme libre, a au moins une racine réelle positive, car

$$P(0) = \frac{\lambda}{2\omega_1} > 0 \text{ (si } \lambda > 0), \quad P(+\infty) = -\infty \rightarrow P(y_2^0) = 0,$$

où $0 < y_2^0 < +\infty$.

Les équations aux variations, correspondant à la solution (4.15), ont la forme :

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= p_{11} \xi_1 + p_{12} \xi_2 \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= p_{21} \xi_1 + p_{22} \xi_2 \end{aligned}$$

où

$$p_{11} = \frac{\partial P_1(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_1^0} = -\frac{3\gamma}{4\omega_1} y_1^0 y_2^0 - H;$$

$$p_{12} = \frac{\partial P_1(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_2^0} = -\frac{3\gamma}{8\omega_1} \left(\frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2^0 + 2 y_2^{0^2} \right) - \int;$$

$$p_{21} = \frac{\partial P_2(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_1^0} = \frac{3\gamma}{8\omega_1} \left(\frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2^0 + 2 y_1^{0^2} \right) + \int;$$

$$p_{22} = \frac{\partial P_2(y_1^0, y_2^0)}{\partial y_2^0} = \frac{3\gamma}{4\omega_1} y_1^0 y_2^0 - H$$

sont des coefficients constants.

L'équation déterminante du système aux variations est la suivante :

$$(4.24) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial y_1} - \lambda & \frac{\partial P_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial y_1} & \frac{\partial P_2}{\partial y_2} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (-\frac{3\gamma}{4\omega_1} y_1^0 y_2^0 - H) - \lambda & -\frac{3\gamma}{8\omega_1} (\frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2^0 + 2y_2^0) - \delta \\ \frac{3\gamma}{8\omega_1} (\frac{\lambda}{2\omega_1 H} y_2^0 + 2y_1^0) + \delta & (\frac{3\gamma}{4\omega_1} y_1^0 y_2^0 - H) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(4.24') \quad \lambda^2 + 2H\lambda + \left[H^2 + (\alpha y_2^0 + \delta)^2 + 2\alpha y_2^0 (\alpha y_2^0 + \delta) \right] = 0$$

De là on voit que les racines

$$(4.25) \quad \lambda_{1,2} = -H \pm Gi, \quad \text{où } G^2 = (\alpha y_2^0 + \delta) (3\alpha y_2^0 + \delta),$$

$$i = \sqrt{-1}$$

de l'équation déterminante (4.24), ont leurs parties réelles non seulement différentes de zéro, mais négatives.

Dans ce cas, conformément au théorème de BOGOLJUBOV, le système (4.12) admet, pour μ suffisamment petit, une solution presque-périodique, qui se ramène à la solution (4.15) quand $\mu = 0$.

Pour trouver la solution ci-dessus, on fera la substitution

$$(4.26) \quad \begin{cases} y_1 = y_1^0 + \mu z_1 \\ y_2 = y_2^0 + \mu z_2 \end{cases}$$

Alors, les équations (4.12) deviendront :

$$(4.27) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \mu (p_{11} z_1 + p_{12} z_2) + \mu Y_1^*(t, y_1^0, y_2^0, 0) + \mu^2 Z_1(t, z_1, z_2, \mu) \\ \frac{dz_2}{dt} = \mu (p_{21} z_1 + p_{22} z_2) + \mu Y_2^*(t, y_1^0, y_2^0, 0) + \mu^2 Z_2(t, z_1, z_2, \mu) \end{cases}$$

où les expressions $Y_s^*(t, y_1^0, y_2^0, 0)$; ($s = 1, 2$), s'obtiennent aisément des coefficients de μ^2 des équations (4.2), en faisant là $y_1 = y_1^0$; $y_2 = y_2^0$. Les fonctions Z_1 et Z_2 ont la même structure et les mêmes propriétés que les fonctions correspondantes du précédent paragraphe.

A l'aide de la substitution

$$(4.28) \quad \tau = \mu t, \quad Y_s^*(t, y_1^0, y_2^0, 0) = f_s(\tau), \quad (s = 1, 2),$$

les équations (4.27) deviennent :

$$(4.29) \quad \begin{cases} \frac{dz_1}{d\tau} = p_{11} z_1 + p_{12} z_2 + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_1\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu\right) \\ \frac{dz_2}{d\tau} = p_{21} z_1 + p_{22} z_2 + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_2\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1, z_2, \mu\right) \end{cases}$$

Comme on l'a vu auparavant, l'équation déterminante du système (4.23) n'a pas de racines à parties réelles. Par conséquent, les équations (4.29) satisfont à toutes les conditions, de même que les équations analogues (3.34) (paragraphe 3).

Par suite, ces équations possèdent la solution presque-périodique $z_s = z_s^*(\tau)$, qui représente la limite de la suite des solutions presque-périodiques $z_s^{(K)}(\tau)$ des systèmes :

$$(4.30) \quad \frac{dz_1}{d\tau} = p_{11} z_1^{(K)} + p_{12} z_2^{(K)} + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu Z_1\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^{(K-1)}, z_2^{(K-1)}, \mu\right),$$

$$\frac{dz_2}{d\tau} = p_{21} z_1^{(K)} + p_{22} z_2^{(K)} + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) + \mu z_2\left(\frac{\tau}{\mu}, z_1^{(K-1)}, z_2^{(K-1)}, \mu\right)$$

$$(K = 2, 3, \dots)$$

Dans ce cas, comme première approximation, on prend la solution presque-périodique du système :

$$(4.31) \quad \begin{cases} \frac{dz_1^{(1)}}{d\tau} = p_{11} z_1^{(1)} + p_{12} z_2^{(1)} + f_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \\ \frac{dz_2^{(1)}}{d\tau} = p_{21} z_1^{(1)} + p_{22} z_2^{(2)} + f_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \end{cases}$$

La solution de ce système sera :

$$(4.32) \quad z_1^{(1)} = \psi_1\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos G(u-\tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin G(u-\tau) \right] du$$

$$z_2^{(1)} = \psi_2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) = e^{-H\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{Hu} \left[f_1\left(\frac{u}{\mu}\right) \sin G(u-\tau) + f_2\left(\frac{u}{\mu}\right) \cos G(u-\tau) \right] du$$

Si l'on se borne à la première approximation donnée par (4.32), on remarque que :

$$(4.33) \quad \begin{cases} y_1 = y_1^0 + \mu \psi_1(t) \\ y_2 = y_2^0 + \mu \psi_2(t) \end{cases}$$

est la solution presque-périodique du système (4.12), solution qui se ramènera, pour $\mu = 0$, à la solution (4.15).

Etant donné que les fonctions

$$(4.34) \quad u_1 = \sum_{p=1}^{11} \frac{A_{1p} \sin \vartheta_p t - B_{1p} \cos \vartheta_p t}{\vartheta_p}$$

$$u_2 = \sum_{p=1}^{11} \frac{A_{2p} \sin \vartheta_p t - B_{2p} \cos \vartheta_p t}{\vartheta_p}$$

sont presque-périodiques, en vertu des relations (4.10), il en résulte qu'à la solution obtenue (4.31) correspond une vibration presque-périodique du système (4.6), qui se transforme, pour $\mu = 0$, en état d'équilibre du système (4.13) :

$$(4.35) \quad \begin{cases} M_1(t) = M_1^* + \mu \varphi_1(t) + \mu u_1 \left[t, M_1^* + \mu \varphi_1(t), M_2^* + \mu \varphi_2(t) \right] \\ M_2(t) = M_2^* + \mu \varphi_2(t) + \mu u_2 \left[t, M_1^* + \mu \varphi_1(t), M_2^* + \mu \varphi_2(t) \right] \end{cases}$$

où

$$M_1^* = y_1^0 \quad ; \quad M_2^* = y_2^0 .$$

La solution presque-périodique du système (4.2') sera alors :

(4.36)

$$\begin{aligned} x_1 &= M_1^* \cos \omega_1 t + M_2^* \sin \omega_1 t + \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t + \mu \left[\varphi_1(t) \cos \omega_1 t + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(t) \sin \omega_1 t \right] + \mu \left\{ u_1 \left[t, M_1^* + \mu \varphi_1(t), M_2^* + \mu \varphi_2(t) \right] \cos \omega_1 t + \right. \\ &\quad \left. + u_2 \left[t, M_1^* + \mu \varphi_1, M_2^* + \mu \varphi_2 \right] \sin \omega_1 t \right\} \\ x_2 &= M_1^* \sin \omega_1 t - M_2^* \cos \omega_1 t + \frac{b \omega_1}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t + \\ &\quad + \mu \left[\varphi_1(t) \sin \omega_1 t - \varphi_2(t) \cos \omega_1 t \right] + \mu \left\{ u_1 \left[t, M_1^* + \mu \varphi_1, M_2^* + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu \varphi_2 \right] \sin \omega_1 t - u_2 \left[t, M_1^* + \mu \varphi_1, M_2^* + \mu \varphi_2 \right] \cos \omega_1 t \right\} \end{aligned}$$

qui se ramène, pour $\mu = 0$, à la solution génératrice presque-périodique

$$(4.37) \quad \begin{cases} x_1^0 = M_1^* \cos \omega_1 t + M_2^* \sin \omega_1 t + \frac{b}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cos \omega_2 t \\ x_2^0 = M_1^* \sin \omega_1 t - M_2^* \cos \omega_1 t + \frac{b \omega_2}{\omega_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} \sin \omega_2 t \end{cases}$$

En ce qui concerne la stabilité de la solution (4.36), on peut affirmer avec certitude que cette solution est asymptotiquement stable.

tiquement stable, car les équations du mouvement troublé (après la substitution $z_1 = z_1^* + v_1$, $z_2 = z_2^* + v_2$) :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{d\tau} = p_{11} v_1 + p_{12} v_2 + \mu V_1 (\tau, v_1, v_2, \mu) \\ \frac{dv_2}{d\tau} = p_{21} v_1 + p_{22} v_2 + \mu V_2 (\tau, v_1, v_2, \mu) \end{cases}$$

vérifient toutes les conditions du théorème fondamental de LIAPOUNOFF (Voir paragraphe 3).

----- 0 -----



A N N E X E I

-:-

A) SYSTEMES APPROCHES DES SYSTEMES ARBITRAIRES NON LINEAIRES.

-:-

I - SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES NON AUTONOMES DANS LE CAS OU LA SOLUTION GENERATRICE EST ISOLEE.

Supposons que les vibrations soient décrites suivant les équations :

$$(1.1) \quad \frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + \mu f_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

dont les membres droits sont définis pour toutes les valeurs réelles de t , pour les valeurs μ appartenant à un intervalle quelconque $(0, \mu_0)$ et pour les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ appartenant à un domaine fermé quelconque G de l'espace de ces variables. Dans le domaine indiqué $X_s + \mu f_s$ sont des fonctions continues et périodiques de période ω par rapport à t ; f_s admet des dérivées partielles du premier ordre, continues par rapport aux $x_1, \dots, x_n, \mu$. X_s ne dépend pas de μ et admet des dérivées continues du deuxième ordre par rapport aux $x_1, \dots, x_n$.

Considérons le système générateur :

$$(1.2) \quad \frac{dx_s^0}{dt} = X_s(t, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

et supposons qu'il admette la solution

$$(1.3) \quad x_s^0 = \varphi_s(t)$$

de telle sorte que $\varphi_s(0) = \varphi_s(\omega)$ et la solution se trouve dans le domaine G .

Nous allons chercher les conditions dans lesquelles à cette solution génératrice correspond une solution périodique du système (1.1), c'est-à-dire les conditions dans lesquelles le système (1.1) admet une solution périodique qui se réduit à

(1.3) pour $\mu = 0$.

Soit $x_s(t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \mu)$ la solution du système (1.1) satisfaisant aux conditions initiales

$$(1.4) \quad x_s(0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu) = \gamma_s, \text{ d'où évidemment}$$

$$(1.5) \quad x_s(t, \varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0), 0) = \varphi_s(t)$$

Pour que cette solution soit périodique, il faut et il suffit que les équations

$$(1.6) \quad \Psi_s(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu) = x_s(\omega, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu) - \gamma_s = 0$$

soient satisfaites, où Ψ_s dans le voisinage du point $\mu = 0$, $\gamma_s = \varphi_s(0)$ admet des dérivées partielles continues par rapport aux $\gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu$, puisque les parties droites de (1.1) admettent aussi des dérivées partielles continues par rapport aux $x_1, \dots, x_n, \mu$. En vertu de (1.5), les conditions (1.6) sont satisfaites pour $\mu = 0$, $\gamma_s(0)$ parce que la solution génératrice est périodique. Par conséquent, si la condition

$$(1.7) \quad \left\{ \frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_n)}{\partial(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} \right\}_{s=\gamma_s(0), \mu=0} \neq 0$$

est aussi satisfaite, les équations (1.6) admettront, pour μ suffisamment petit, une solution et une seule : $\gamma_s = \gamma_s(\mu)$ avec $\gamma_s(0) = \varphi_s(0)$. En remplaçant cette solution dans les fonctions $x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)$ on obtient la solution périodique du système (1.1) qui se réduit à la solution génératrice pour $\mu = 0$. On arrive donc au théorème de POINCARÉ [75] :

Si la condition (1.7) est satisfaite, le système (1.1), pour suffisamment petit, admet une solution périodique et une seule qui se réduit à la solution génératrice (1.3), pour $\mu = 0$.

Le théorème de POINCARÉ peut être formulé d'une autre manière.

Considérons les équations aux variations des équations (1.2) pour la solution (1.3) (équations à coefficients périodiques) :

$$(1.8) \quad \frac{dy_s}{dt} = p_{sj} y_j + \dots + p_{sn} y_n \quad (s = 1, \dots, n)$$

où p_{sj} sont des fonctions continues, périodiques de période par rapport à t , définies par les formules :

$$(1.9) \quad p_{sj} = \frac{\partial x_s}{\partial x_j} = \frac{\partial x_s(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial \varphi_j}$$

où les parenthèses $\left(\frac{\partial x_s}{\partial x_j} \right)$ désignent que les dérivées sont calculées pour la solution génératrice (1.3).

Etant donné que les fonctions $x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, 0)$ sont des solutions des équations (1.2), qui dépendent de n constantes arbitraires $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ et qui se réduisent à la solution (1.3) pour $\gamma_s = \varphi_s(0)$, alors [75, p.163], ou [67, p. 163], les dérivées de ces fonctions par rapport aux constantes arbitraires (où il faut faire, après la différenciation $\gamma_s = \varphi_s(0)$) définissent les solutions particulières des équations aux variations (1.8). Donc le système (1.8) possède les n solutions suivantes :

$$(1.10) \quad y_{si}(t) = \left\{ \frac{\partial x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, 0)}{\partial \gamma_i} \right\}_{\gamma_j = \varphi_j(0)}$$

où le premier indice désigne le numéro de la fonction dans la solution, et le deuxième, le numéro de la solution.

De (1.10) et (1.4), on trouve que :

$$(1.11) \quad y_{sj}(0) = \delta_{sj} \quad (\delta_{sj} \text{ étant le symbole de Kroneker}).$$

Il en résulte que le déterminant caractéristique du système (1.8) [67, p. 167] sera :

$$(1.12) \quad D(\rho) = \begin{vmatrix} y_{11}(\omega) - \rho & y_{21}(\omega) & \dots & y_{n1}(\omega) \\ y_{12}(\omega) & y_{22}(\omega) - \rho & \dots & y_{n2}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n}(\omega) & y_{2n}(\omega) & \dots & y_{nn}(\omega) - \rho \end{vmatrix}$$

De (1.6) et (1.10), on obtient :

$$\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial \gamma_j} \right)_{\gamma_i = \varphi_i(0), \mu=0} = y_{sj}(\omega) - \delta_{sj} \quad \text{et par conséquent :}$$

(1.13)

$$\left\{ \frac{(\psi_1, \dots, \psi_n)}{(\chi_1, \dots, \chi_n)} \right\}_{\substack{\chi_i = \psi_i(0), \mu=0}} = \begin{vmatrix} y_{11}(\omega)-1 & y_{21}(\omega) & \dots & y_{n1}(\omega) \\ y_{12}(\omega) & y_{22}(\omega)-1 & \dots & y_{n2}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1n}(\omega) & y_{2n}(\omega) & \dots & y_{nn}(\omega)-1 \end{vmatrix} = D(1) \quad (R)$$

Alors la condition est équivalente à la condition $D(1) \neq 0$, c'est-à-dire que l'équation caractéristique $D(\rho) = 0$ du système (1.8) n'a pas de racines égales à 1, ou que le système (1.8) n'a pas de solutions périodiques (car, en général, $x_s(t) = e^{\alpha_k t} \psi_s(t)$, $\alpha_k = \frac{1}{n} \ln \rho_k$ étant les exposants caractéristiques et $\psi_s(t)$ étant des fonctions continues de période ω [67]).

Définition :

On dira que la solution périodique (1.3) du système (1.2) est isolée, si les équations aux variations correspondantes n'ont pas de solutions périodiques. Alors, le théorème de POINCARÉ sera : Pour chaque solution périodique génératrice isolée, le système (1.1), pour μ suffisamment petit, admet une solution périodique et une seule qui se réduit à la solution génératrice pour $\mu = 0$.

Remarque : Si les équations (1.1) sont analytiques par rapport aux μ , $x_1, \dots, x_n$, alors (comme on le voit facilement), la solution périodique indiquée sera analytique par rapport à μ .

Du théorème de POINCARÉ, il résulte que, dans le cas d'une solution génératrice isolée, il existe une concordance parfaite entre le système (1.1) et le système simplifié (1.2). Pourtant, pour la théorie des vibrations non linéaires, les cas où une telle concordance n'existe pas - ce qui est possible lorsque la solution génératrice n'est pas isolée - présentent le plus grand intérêt. Le cas le plus important est celui où la solution génératrice correspondante appartient à une famille qui dépend d'un certain nombre de paramètres.

2 - SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES NON AUTONOMES DANS LE CAS D'UNE FAMILLE DE SOLUTIONS GENERATRICES.

Supposons que le système générateur (1.2) admette une famille de solutions périodiques de période ω :

$$(2.1) \quad x_s^0 = \psi_s(t, h_1, \dots, h_k) \quad (s = 1, \dots, n)$$

contenant $k \leq n$ constantes arbitraires. Pour la solution génératrice correspondante, qui se trouve dans le domaine G , $h_i = h_i^*$. Supposons aussi que φ_s soient deux fois dérivables par rapport aux h_i . Pour assurer l'indépendance de ces paramètres, on suppose qu'au moins un des déterminants d'ordre k , contenus dans la matrice

$$(2.2) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial h_k} \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas pour $h_i = h_i^*$, $t = 0$. Par conséquent, ces paramètres peuvent être exprimés à partir de k valeurs initiales des quantités x_s^0 .

Soit $x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)$ la solution de (1.1) satisfaisant aux conditions initiales (1.4). Les conditions de périodicité (1.6) seront satisfaites par la solution génératrice (pour $\mu = 0$, $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1^*, \dots, h_k^*)$). Mais à la différence de la solution génératrice isolée, les conditions (1.6) seront aussi satisfaites pour $\mu = 0$, $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1, \dots, h_k)$ car toutes les solutions (2.1) du système générateur sont périodiques. Il va sans dire que l'équation (1.6) a, pour $\mu = 0$, non seulement une solution, mais une famille des solutions $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1, \dots, h_k)$ qui dépend de k constantes arbitraires. Par conséquent, non seulement le jacobien

$$(2.3) \quad \left\{ \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} \right\}_{\mu=0, \gamma_s = \varphi_s(0, h_1^*, \dots, h_k^*)}$$

s'annule, mais, nécessairement, tous les mineurs jusqu'à l'ordre $(n - k + 1)$ s'annulent aussi.

On sait [75] que les fonctions

$$(2.4) \quad \varphi_{si}(t) = \left\{ \frac{\partial \varphi_s(t, h_1, \dots, h_k)}{\partial h_i} \right\}_{h_j = h_j^*} \quad \begin{matrix} (s = 1, \dots, n) \\ (i = 1, \dots, k) \end{matrix}$$

déterminent k solutions particulières (évidemment périodiques

de période ω) des équations aux variations (1.8). Par conséquent, l'équation caractéristique du système (1.8) a une racine égale à 1, multiple d'ordre K , qui annule tous les mineurs du déterminant caractéristique au moins jusqu'à l'ordre $(n - K + 1)$. D'ici, en vertu de (1.14), nous sommes convaincus de la véracité de notre affirmation sur le jacobien (2.3).

Supposons qu'au moins l'un des mineurs d'ordre $(n-K)$ du déterminant (2.3) ne soit pas nul ou (c'est la même chose), que le système aux variations (1.8) ait exactement K solutions périodiques. Supposons, pour fixer les idées, que :

$$(2.5) \quad \left\{ \frac{\delta(\psi_1, \dots, \psi_{n-k})}{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})} \right\} \neq 0$$

$$\mu = 0, \gamma_s = \psi_s(0, h_1^*, \dots, h_k^*)$$

Dans ces conditions, les premières $(n-K)$ équations de (1.6) ont une solution pour $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k}$. Ces quantités sont des fonctions de $\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n, \mu$, qui se réduisent aux $\psi_1(0, h_1^*, \dots, h_k^*) \dots \psi_{n-k}(0, h_1^*, \dots, h_k^*)$ pour $\mu = 0$,

$\gamma_j = \psi_j(0, h_1^*, \dots, h_k^*)$; ($j = n-k+1, \dots, n$) et qui possèdent dans le voisinage de ce point des dérivées partielles continues du premier ordre.

En remplaçant ces quantités dans les K dernières équations (1.6) pour la détermination des $\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n$, on obtient un système de k équations qui peut être mis sous la forme :

$$\Phi_i = F_i(\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n) + \mu \Psi_i(\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n, \mu) = 0$$

$$(i = 1, \dots, k)$$

où F_i et Ψ_i ont, dans le voisinage des $\mu = 0$, $\gamma_j = \psi_j(0, h_1^*, \dots, h_k^*)$, des dérivées partielles continues du premier ordre par rapport aux $\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n$. Etant donné que la solution $\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n$ du système (2.6) doit dépendre de K constantes arbitraires, il faut que les fonctions F_i soient identiquement nulles. En conséquence, les équations (2.6), après la simplification par μ , deviennent :

$$(2.7) \quad \Psi_i(\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n, \mu) = 0 \quad (i = 1, \dots, k)$$

Alors, pour l'existence de la solution périodique du système (1.1), il faut et il suffit que le système (2.7) admette une solution par rapport aux γ_j ($j = n-K+1, \dots, n$) qui se réduisent aux $\psi_j(o, h_1^*, \dots, h_K^*)$ pour $\mu = 0$. Mais pour cela, il faut d'abord que les $h_1^*, \dots, h_K^*$ satisfassent aux conditions

$$(2.8) \quad P_i(h_1^*, \dots, h_K^*) = \Psi_i(\psi_{n-K+1}(o, h_1^*, \dots, h_K^*) \dots \psi_n(o, h_1^*, \dots, h_K^*)) = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, K)$$

Si, en même temps, la condition suivante est satisfaite

$$(2.9) \quad \Delta = \left\{ \frac{\partial(\Psi_1, \dots, \Psi_K)}{\partial(\gamma_{n-K+1}, \dots, \gamma_n)} \right\}_{\mu=0, \gamma_j = \psi_j(o, h_1^*, \dots, h_K^*)} \neq 0$$

alors le système (2.7) admettra véritablement une solution unique pour γ_j ($j = n-K+1, \dots, n$) de la forme exigée et, par conséquent, il y aura aussi une solution périodique de (1.1).

On peut démontrer que la condition (2.9) est équivalente à la condition [67] :

$$(2.10) \quad \frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(h_1^*, \dots, h_K^*)} \neq 0$$

Nous allons chercher maintenant une forme plus convenable des conditions (2.8).

Etant donné que les fonctions Ψ_s admettent des dérivées partielles continues du premier ordre dans le voisinage du point $\gamma_s = \psi_s(o, h_1^*, \dots, h_K^*)$, en faisant $\beta_s = \gamma_s - \psi_s(o, h_1^*, \dots, h_K^*)$ les équations (1.6) peuvent être écrites comme suit :

$$(2.11) \quad \Psi_s = (u_{s1} + U_{s1}) (\beta_1 + \dots + (u_{sn} + U_{sn}) (\beta_n + (v_s + V_s) \mu = 0, \quad ,$$

où

$$(2.12) \quad u_{si} = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \gamma_i} \right), \quad v_s = \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial \mu} \right)$$

et U_{si} et V_s sont des fonctions continues de $\beta_1, \dots, \beta_n$. De (2.11), il résulte que les conditions (2.8) s'obtiennent en

éliminant les quantités $\beta_1, \dots, \beta_n$ qui satisfont aux équations

$$(2.13) \quad u_{s1} \beta_1 + \dots + u_{sn} \beta_n + v_s \mu = 0$$

Examinons en détail ces équations. En vertu de (1.13), on peut écrire :

$$(2.14) \quad u_{si} = y_{si}^* (\omega, 0) - \int_{si}$$

$y_{si}^* (t, \tau)$ étant le système fondamental des solutions des équations (1.8), satisfaisant aux conditions initiales (pour $t = \tau$)

$$(2.15) \quad y_{si}^* (\tau, \tau) = \int_{si}$$

Pour les quantités v_s , en vertu de (1.6), on trouve

$$(2.16) \quad v_s = \frac{\partial x_s(\omega, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)}{\partial \mu}$$

En remplaçant ici les fonctions $x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)$ qui satisfont aux équations (1.1) et en dérivant par rapport à μ , les identités obtenues, on aura :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_s}{\partial \mu} \right) \equiv \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial x_s}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial \mu} \mu f_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)$$

Puis, en faisant $\mu = 0$, $\gamma_s = \psi_s(0, h_1^*, \dots, h_n^*)$, et en tenant compte de (1.9), on obtient :

$$(2.17) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_s}{\partial \mu} \right) = \sum_{\alpha=1}^n p_{s\alpha} \left(\frac{\partial x_s}{\partial \mu} \right) + f_s(t, \psi_1, \dots, \psi_n, 0)_{h_i=h_i^*}$$

En dehors de celle-ci, de (1.4), on trouve que :

$$\frac{\partial x(0, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)}{\partial \mu} = 0, \text{ et par conséquent les fonctions}$$

$$\frac{\partial x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)}{\partial \mu} \text{ représentent une solution particu-}$$

lière de l'équation (2.17) satisfaisant aux valeurs initiales nulles. Alors, par une simple vérification, on voit que :

$$\left(\frac{\Delta x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu)}{\delta \mu} \right) = \int_0^t \sum_{\alpha=1}^n \left[f_{\alpha}(\tau, \psi_1, \dots, \psi_n, 0) \right]_{t=\tau=h_1=h_1^*} y_{s\alpha}(t, \tau) d\tau$$

Cela étant établi, en vertu de (2.14) et (2.16), on peut écrire les équations (2.13) comme suit :

$$(2.18) \quad \sum_{\alpha=1}^n y_{s\alpha}^*(\omega, 0) \beta_{\alpha} - \beta_s + \mu \int_0^{\omega} \sum_{\alpha=1}^n \left[f_{\alpha}(\tau, \psi_1, \dots, \psi_n, 0) \right]_{t=\tau, h_1=h_1^*} y_{s\alpha}^*(\omega, \tau) d\tau = 0$$

Le problème consiste maintenant à éliminer les quantités $\beta_1, \dots, \beta_n$ de ces équations.

Dans ce but, considérons le système adjoint au système aux variations (1.8) :

$$(2.19) \quad \frac{dz_s}{dt} + p_{1s} z_1 + \dots + p_{ns} z_n = 0 \quad (s = 1, \dots, n)$$

On sait [105] que l'intégration de l'un des systèmes (1.8) et (2.19) entraîne celle de l'autre. Etant donné que (1.8) admet k solutions périodiques (2.4), alors (2.19) admet aussi k solutions périodiques que nous appelons $\psi_{s1}(t), \dots, \psi_{sk}(t)$.

Entre les deux systèmes particuliers d'intégrales des deux systèmes adjoints (en vertu de (2.15)), on trouve facilement les relations (identités) :

$$(2.20) \quad \sum_{\alpha=1}^n y_{s\alpha}^*(t, \tau) \psi_{\alpha i}(t) = \psi_{\alpha i}(\tau) \quad (s = 1, \dots, n)$$

qu'on utilise à éliminer $\beta_1, \dots, \beta_n$ de (2.18). De (2.18), on trouve :

$$\sum_{s, \alpha=1}^n y_{s\alpha}^*(\omega, 0) \psi_{si}(\omega) \beta_{\alpha} - \sum_{s=1}^n \beta_s \psi_{si}(\omega) + \mu \int_0^{\omega} \sum_{s, \alpha=1}^n \left[f_{\alpha}(\tau, \dots) \right]_{t=\tau, h_1=h_1^*} y_{s\alpha}(\omega, \tau) \psi_{si}(\omega) d\tau = 0$$

Les relations (2.23) donnent :

$$\mu \int_0^{\omega} \sum_{\alpha=1}^n \left[f_{\alpha}(\tau, \dots) \right]_{t=\tau, h_i=h_i^*} \psi_{\alpha i}(\tau) d\tau = 0 \quad (i=1, \dots, K)$$

C'est le résultat cherché pour éliminer $\beta_1, \dots, \beta_n$ de (2.13). Par conséquent, les équations (2.8), qui déterminent les paramètres h_i^* de la solution génératrice, seront :

$$(2.21) \quad P_i(h_1^*, h_2^*, \dots, h_K^*) = \int_0^{\omega} \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} \left[t, \psi_1(t, h_1^*, \dots, h_K^*), \dots, \psi_n(t, h_1^*, \dots, h_K^*), 0 \right] \psi_{\alpha i}(t) dt = 0$$

(i = 1, ..., k)

On arrive ainsi au théorème de MALKIN [64] : Pour que le système (1.1) admette une solution périodique qui se réduise à la solution génératrice appartenant à la famille (2.1), pour $\mu = 0$, il faut que les paramètres h_i^* de la solution génératrice, satisfassent au système des équations (2.21). A chaque solution simple de ce système, c'est-à-dire à chaque solution pour laquelle la condition (2.10) est satisfaite, correspond, en vérité, une solution périodique du système (1.1) et une seule.

Conséquences :

1) De l'analyse précédente, il résulte que la solution périodique x_s du système (1.1) aura des dérivées continues du premier ordre par rapport à μ .

2) Si les parties droites des équations (1.1) admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p , par rapport aux $x_0, \dots, x_n, \mu$, les fonctions x_s de la solution périodique admettront aussi des dérivées jusqu'à l'ordre p , par rapport à μ .

3) Si les parties droites des équations (1.1) sont analytiques par rapport aux $x_1, \dots, x_n, \mu$, les solutions périodiques obtenues seront analytiques par rapport à μ . En effet, dans ce cas, les fonctions $x_s(t, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ seront analytiques par rapport aux $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, et les solutions $\gamma_s = \gamma_s(\mu)$ des équations (2.7) et (1.6) seront analytiques par rapport à μ .

4) Dans le cas où les équations (2.21) seront identiquement satisfaites, les fonctions Ψ_i de (2.7), auront la forme $\Psi_i = \mu^p \Psi_i^*$ ($x_{n-K+1}, \dots, x_n, \mu$), où p est un certain nombre entier. Ici, on suppose que les Ψ_i ont des dérivées au moins jusqu'à l'ordre p par rapport à μ . Pour cela, il suffit que les parties droites des équations (1.1) aient des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $p+1$, par rapport aux $\mu, x_1, \dots, x_n$. Les équations (2.8), maintenant, se remplacent par les équations :

$$(2.22) \quad P_i^*(h_1^*, \dots, h_K^*) = \Psi_i^* \left[\psi_{n-K+1}(0, h_1^*, \dots, h_K^*), \dots \right. \\ \left. \dots, \psi_n(0, h_1^*, \dots, h_K^*), 0 \right] = 0 \quad (i=1, \dots, K)$$

et à chaque solution de ces équations, où

$$\frac{\partial (P_1^*, \dots, P_K^*)}{\partial (h_1^*, \dots, h_K^*)} \neq 0$$

il correspondra vraiment une solution unique du système (1.1).

III - CAS DES EQUATIONS ANALYTIQUES.

Considérons le système

$$(3.1) \quad \frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + \mu f_s^{(1)}(t, x_1, \dots, x_n) + \mu^2 f_s^{(2)} + \dots \\ (s = 1, \dots, n)$$

$f_s^{(p)}$ étant analytiques par rapport aux $x_1, \dots, x_n$ en G .

Supposons que le système générateur ait une famille de solutions périodiques (2.1). Soit h_i une solution quelconque des équations (2.21) satisfaisant à la condition (2.10). Alors, on vient de démontrer que le système (3.1) possède une seule solution périodique qui se réduit à la solution

$\psi_s(t, h_1^*, \dots, h_K^*)$ de la famille (2.1), et celle-ci sera analytique par rapport à μ . On peut donc écrire :

$$(3.2) \quad x_s = \psi_s(t, h_1^*, \dots, h_K^*) + \mu x_s^{(1)} + \mu^2 x_s^{(2)} + \dots \quad (s=1, \dots, n)$$

$x_s^{(p)}$ étant des fonctions périodiques de période ω par rapport à t .

Nous allons démontrer qu'il y a seulement un système de séries de la forme (3.2) satisfaisant aux équations (3.1) et nous montrerons la méthode de leur calcul.

En substituant les séries (3.2) dans les équations (3.1) et en égalant les coefficients des mêmes puissances de $\frac{1}{t}$, on obtient :

$$(3.3) \quad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1^{(p)} + \dots + p_{sn} x_n^{(p)} + f_s^{(p)} \quad (s = 1, \dots, n)$$

où p_{sj} sont les coefficients des équations aux variations, définis par les formules :

$$(3.4) \quad p_{sj} = \left(\frac{\partial X_s(t, \psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial \psi_j} \right)_{h_i=h_i^*}$$

et $F_s^{(p)}$ sont des polynômes en $x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(p-1)}$ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t . En particulier:

$$(3.5) \quad F_s^{(1)} = f_s^{(1)} [t, \psi_1(t, h_1^*, \dots, h_K^*), \dots, \psi_n(t, h_1^*, \dots, h_K^*)]$$

Pour que le système (3.3) admette une solution périodique $x_s^{(p)}$, il faut et il suffit que les conditions

$$(3.6) \quad \int_0^\omega \sum_{\alpha=1}^n F_\alpha^{(p)} \psi_\alpha dt = 0 \quad (i = 1, \dots, K)$$

soient satisfaites.

Pour $p = 1$, les équations (3.6) coïncident avec les équations (2.21), qui déterminent les paramètres de la solution génératrice. Mais, étant donné que les dernières sont satisfaites, alors le système pour $x_s^{(1)}$ admet une solution périodique qui a la forme :

$$x_s^{(1)} = M_1^{(1)} \psi_{s1} + \dots + M_K^{(1)} \psi_{sK} + x_s^{(1)*}$$

où $x_s^{(1)*}$ est une solution particulière quelconque du système en $x_s^{(1)}$, ψ_{si} - solutions périodiques données par (2.4) - et $M_i^{(1)}$ sont des constantes arbitraires qui seront déterminées par les conditions de la périodicité des fonctions $x_s^{(2)}$.

Supposons, en général, que toutes les fonctions $x_s^{(\ell)}$...
 $x_s^{(\ell)}$ aient déjà été calculées, et qu'elles soient périodiques.
 Les fonctions $x_s^{(\ell)}$ auront alors la forme :

$$x_s^{(\ell)} = M_1^{(\ell)} \varphi_{s1} + \dots + M_K^{(\ell)} \varphi_{sK} + x_s^{(\ell)*}$$

où $x_s^{(\ell)*}$ est une solution périodique particulière quelconque
 du système en $x_s^{(\ell)}$ et $M_i^{(\ell)}$ sont des constantes arbitraires
 qui seront déterminées par les conditions de périodicité des
 fonctions $x_s^{(\ell+1)}$.

Nous allons étudier en détail les équations qui déter-
 minent ces constantes. Nous allons démontrer qu'elles sont li-
 néaires et que leur déterminant fonctionnel (jacobien) coïncide
 avec le déterminant fonctionnel (2.10). On voit facilement que
 les fonctions $F_s^{(\ell+1)}$ ont la forme :

$$\begin{aligned} F_s^{(\ell+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^K \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 X_s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) (x_\alpha^{(1)} \varphi_{\beta j} + \\ &+ x_\beta^{(1)} \varphi_{\alpha j}) M_j^{(\ell)} + \sum_{j=1}^K \sum_{\alpha=1}^n \left(-\frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial x_j} \right) \varphi_{\alpha j} M_j^{(\ell)} + R_s^{(\ell+1)} = \\ &= \sum_{j=1}^K \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 X_s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} x_\alpha^{(1)} \varphi_{\beta j} M_j^{(\ell)} + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^K \sum_{\alpha=1}^n \left(-\frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial x_j} \right) \varphi_{\alpha j} M_j^{(\ell)} + R_s^{(\ell+1)} \right) \end{aligned}$$

$R_s^{(\ell+1)}$ étant des fonctions périodiques de t , déterminées,
 qui ne dépendent pas de $M_j^{(\ell)}$, les paramètres montrent que
 les dérivées sont prises pour $x_s = \varphi_s(t, h_1^*, \dots, h_K^*)$.

D'après les formules (3.4) et (3.5), et (2.4), nous
 avons :

$$(3.7) \quad F_s^{(\ell+1)} = \sum_{j=1}^K \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial p_{s\alpha}}{\partial h_j^*} x_\alpha^{(1)} + \frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial h_j^*} \right\} M_j^{(\ell)} + R_s^{(\ell+1)}$$

Pour $\ell > 0$, les fonctions $F_S^{(\ell+1)}$ sont linéaires par rapport à $M_i^{(\ell)}$, mais $F_S^{(2)}$ sont des fonctions carrées par rapport à $M_i^{(1)}$, car les constantes $M_i^{(1)}$ se trouvent aussi dans l'expression de $x_S^{(1)}$. On peut donc écrire :

$$F_S^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i,j=1}^K \frac{\partial p_{S\alpha}}{\partial h_j^*} \psi_{\alpha i} M_i^{(1)} M_j^{(1)} + \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial p_{S\alpha}}{\partial h_j^*} x_{\alpha}^{(1)*} + \frac{\partial F_S^{(1)}}{\partial h_j^*} \right\} M_j^{(1)} + R_S^{(2)}$$

De (3.7) pour $p = \ell + 1$, les équations (3.6), qui déterminent $M_i^{(\ell)}$ ont la forme :

$$(3.8) \quad A_{1i} M_i^{(\ell)} + \dots + A_{Ki} M_K^{(\ell)} + B_i^{(\ell)} = 0 \quad (i = 1, \dots, K)$$

où les quantités $B_i^{(\ell)}$ ne dépendent pas de $M_j^{(\ell)}$ et

$$(3.9) \quad A_{ji} = \int_0^{\omega} \sum_{\beta=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial h_j^*} x_{\alpha}^{(1)} + \frac{\partial F_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*} \right) \psi_{\beta i} dt$$

Pour $\ell = 1$, les équations (3.8) contiendront encore des termes au carré :

$$A_i = \sum_{j,m=1}^n A_{jmi} M_j^{(1)} M_m^{(1)} \quad \text{où} \quad A_{jmi} = \int_0^{\omega} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial h_j^*} \psi_{\alpha m} \psi_{\beta i} dt$$

Les fonctions $x_{\beta}^{(1)}$ (ainsi que $x_{\beta}^{(1)*}$) satisfont aux équations:

$$(3.10) \quad \frac{dx_{\beta}^{(1)}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n p_{\beta\alpha} x_{\alpha}^{(1)} + F_{\beta}^{(1)} \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*} \right) = \\ = \sum_{\alpha=1}^n p_{\beta\alpha} \frac{\partial x_{\alpha}^{(1)}}{\partial h_j^*} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial p_{\beta\alpha}}{\partial h_j^*} x_{\alpha}^{(1)} + \frac{\partial F_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*}$$

Par conséquent, les quantités A_{ji} peuvent être écrites sous

la forme :

$$A_{ji} = \int_0^{\omega} \sum_{\beta=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*} \right) - \sum_{\alpha=1}^n p_{\beta\alpha} \frac{\partial x_{\alpha}^{(1)}}{\partial h_j^*} \right\} \psi_{\beta i} dt =$$

$$= \int_0^{\omega} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial x_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*} \psi_{\beta i} dt$$

En intégrant, en vertu de (2.2), on trouve successi-

$$A_{ji} = \left[\sum_{\beta} \frac{\partial x_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*} \psi_{\beta i} - \int_0^{\omega} \sum_{\beta=1}^n \left\{ \frac{\partial x_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*} \frac{d\psi_{\beta i}}{dt} + \sum_{\alpha=1}^n p_{\beta\alpha} \frac{\partial x_{\alpha}^{(1)}}{\partial h_j^*} \psi_{\beta i} \right\} dt \right]$$

$$= \int_0^{\omega} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial x_{\beta}^{(1)}}{\partial h_j^*} \psi_{\beta i} dt$$

On peut démontrer ainsi que :

$$A_{ji} = \frac{\partial}{\partial h_j^*} \int_0^{\omega} \sum_{\beta=1}^n F_{\beta}^{(1)} \psi_{\beta i} dt = \frac{\partial P_i}{\partial h_j^*}$$

En ce qui concerne les coefficients A_{jmi} , on peut dire qu'ils sont tous nuls, identiquement. Pour démontrer cela, on peut répéter les mêmes calculs que pour A_{ji} , mais il faut tenir compte que $\psi_{\alpha m}$ satisfait aux équations aux variations homogènes.

Donc, les équations qui déterminent $M_i^{(l)}$ seront toujours linéaires. La partie homogène de ces équations ne dépend pas de l'indice i et a le jacobien égal à (2.10). Par conséquent, à chaque solution simple des équations (2.21) correspond un système de séries (3.2) et un seul, qui satisfait, formellement, aux équations (3.11). Donc, ces séries seront convergentes et représenteront la solution périodique cherchée.

IV - CALCUL PRATIQUE DES SOLUTIONS PERIODIQUES.

Si nous nous bornons à la solution génératrice, alors, pour son calcul, il faut connaître les valeurs h_j^* , c'est-à-

dire les racines des équations (2.21). Pour former ces équations, il faut connaître les fonctions ψ_{si} , qui déterminent k solutions périodiques du système (2.19). La solution de ce dernier problème nécessite la recherche de la solution générale du système (1.8) à coefficients périodiques. C'est dans ce dernier problème que réside toute la difficulté car - on le sait bien - il n'existe pas de méthodes générales pour résoudre les systèmes linéaires à coefficients périodiques. C'est l'inconvénient de la méthode exposée et, par conséquent, le domaine des applications pratiques se rétrécit sensiblement. Il faut limiter le choix des systèmes générateurs à de tels systèmes dont la solution générale est connue.

Dans ce dernier cas, on peut déterminer la solution générale des équations aux variations.

En effet, si $x_s^0 = x_s^0(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des constantes arbitraires) est solution générale du système générateur, les dérivées $\frac{\partial x_s^0}{\partial \alpha_i}$ ($i = 1, \dots, n$) (calculées pour les valeurs des constantes correspondant à la solution génératrice) définissent n solutions particulières indépendantes pour les équations aux variations. On remarque que pour l'intégration complète des équations aux variations, il suffit de trouver $n - 1$ solutions particulières. Il suffit donc de connaître, non pas la solution générale du système générateur, mais la solution qui dépend de $(n - 1)$ constantes arbitraires. En particulier, les équations aux variations peuvent être entièrement intégrées lorsque le nombre k des paramètres h_i de la solution génératrice est égal à $(n-1)$. Néanmoins, dans certains cas, souvent rencontrés en pratique, pour trouver les fonctions ψ_{si} et par conséquent pour constituer les équations (2.21), il ne faut pas chercher la solution générale des équations aux variations ; ces équations peuvent être définies directement d'après la solution génératrice.

1) Le cas le plus simple est celui où les systèmes aux variations sont identiques à leur adjoint (système auto-adjoint), c'est-à-dire quand $p_{sj} + p_{js} = 0$ (quels que soient s et j). Dans ce cas, $\psi_{si} = \psi_{si}$ et les fonctions ψ_{si} se déduisent par (2.4) directement de la solution génératrice.

2) Supposons que le système (1.1) soit voisin d'un système canonique :

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_{n+s}} + \mu f_s \quad ; \quad \frac{dx_{n+s}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_s} + \mu f_{n+s} \quad ; \quad (s = 1, \dots, n)$$

$H = H(t, x_1, \dots, x_n)$, $f_r = f_r(t, x_1, \dots, x_{2n}, \mu)$ étant des fonc-

tions satisfaisant aux conditions générales imposées aux équations (1.1). Supposons aussi le système générateur admettant la solution périodique $x_r^{(0)} = x_r^{(0)}(t, h_1, \dots, h_K)$; ($r = 1, \dots, 2n$) qui dépend de K constantes arbitraires. Les équations aux variations, pour une solution quelconque de cette famille, ont la forme suivante :

$$(4.1) \quad \frac{dy_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{2n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_{n+s} \partial x_{\alpha}} \right) y_{\alpha} ; \quad \frac{dy_{n+s}}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^{2n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_{\alpha}} \right) y_{\alpha} ,$$

où les dérivées sont calculées pour $x_r = x_r^{(0)}(t, h_1, \dots, h_K)$. Ces équations ont K solutions périodiques :

$$\varphi_{ri} = \frac{\partial x_r^{(0)}(t, h_1, \dots, h_K)}{\partial h_i} ; \quad (i = 1, \dots, K). \text{ Le système ad-}$$

joint au (4.1) sera :

$$\frac{dz_r}{dt} = - \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_{n+\beta}} \right) z_{\beta} + \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_{\beta}} \right) z_{n+\beta}$$

qui est identique à (4.1) si l'on fait $z_s = y_{n+s}$ et $z_{n+s} = -y_s$ ($s = 1, \dots, n$). Il en résulte directement que ces équations ont k solutions périodiques :

$$\psi_{si} = \frac{\partial x_{s+n}^{(0)}(t, h_1, \dots, h_K)}{\partial h_i} ; \quad \psi_{n+s,i} = - \frac{\partial x_s^{(0)}(t, h_1, \dots, h_K)}{\partial h_i}$$

($i = 1, \dots, n$)
($s = 1, \dots, k$)

et par conséquent les équations (2.21) deviennent :

$$(4.2) \quad P_i(h_1, \dots, h_K) = \int_0^{\omega} \sum_{\beta=1}^n \left\{ f_{\beta}(t, x_1^0, \dots, x_{2n}^0, 0) \frac{\partial x_{n+\beta}^0}{\partial h_i} - \right. \\ \left. - f_{n+\beta}(t, x_1^0, \dots, x_{2n}^0, 0) \frac{\partial x_{\beta}^0}{\partial h_i} \right\} dt = 0$$

3) Supposons maintenant que le système générateur admette les intégrales premières

La fonction x_0 est définie alors par l'équation :

$$(5.6) \quad \sqrt{2} (t+h) = \int_0^x \frac{dx}{\pm \sqrt{V(c) - V(x_0)}}$$

Nous allons étudier en détail cette fonction. Supposons que le point $x_0 = c$ ne soit pas un état d'équilibre du système (6.2); alors $F(c) \neq 0$. Supposons aussi, pour fixer les idées, que $F(c) > 0$, et considérons le mouvement du point x_0 . Suivant la loi (5.4). Au moment initial $t+h = 0$, la vitesse de ce point est nulle et l'accélération est négative. Par conséquent, le point x_0 se déplace au commencement à gauche (pour $t+h > 0$) et on prend devant le radical le signe moins (la quantité qui se trouve sous le radical sera positive). Si, dans ce cas, la fonction

$$(5.7) \quad f(x_0) = V(c) - V(x_0)$$

ne s'annule plus à gauche de $x_0 = c$ en G , le mouvement continuera à gauche jusqu'à ce qu'il se trouve dans le domaine G . Cependant, supposons qu'il y ait un intervalle des valeurs c , pour lesquelles la fonction (5.7) a une racine plus petite que c et que cette valeur c^* appartienne au domaine G . Soit $c^* = c^*(c)$ (la racine simple de la fonction (5.7) la plus proche de c). Alors on peut démontrer que le point x_0 touche la valeur c^* après un intervalle fini $T/2$ dont

$$(5.8) \quad T = T(c) = \sqrt{2} \int_c^{c^*} \frac{dx_0}{|\sqrt{V(c) - V(x_0)}|}$$

Après que le point x_0 ait atteint la valeur c^* (où évidemment $F(c^*) < 0$), il revient à droite et se déplace jusqu'à c , toujours dans un intervalle égal à $T/2$. Pour cette étape, il faut prendre devant le radical le signe plus. De c le mouvement de x se répète périodiquement.

Soit maintenant c^* une racine multiple de la fonction (5.7). Etant donné que, dans ce cas, il faut avoir $F(c^*) = V'(c^*) = 0$, alors à la valeur $x_0 = c^*$ correspond un état d'équilibre du système (5.2). Par conséquent (5.8) diverge et le point x_0 se rapproche asymptotiquement de l'état de l'équilibre pour $t \rightarrow \infty$.

Sur la figure , on montre la forme des trajectoires de phase du système (5.2), lorsque la fonction (5.7) a des raci-

nes plus petites que c .

Ces trajectoires de phase définies par (5.3) seront symétriques par rapport à l'axe x_0 . On a indiqué quelques trajectoires qui correspondent aux valeurs diverses de E . On a aussi donné le graphique de la fonction $V(x_0)$.

Aux points où la fonction $V(x_0)$ a un maximum ou un minimum, correspondent des états d'équilibre du système. Aux points de maximum, correspondent des états d'équilibres instables, et à ceux de minimum, des états d'équilibres stables.

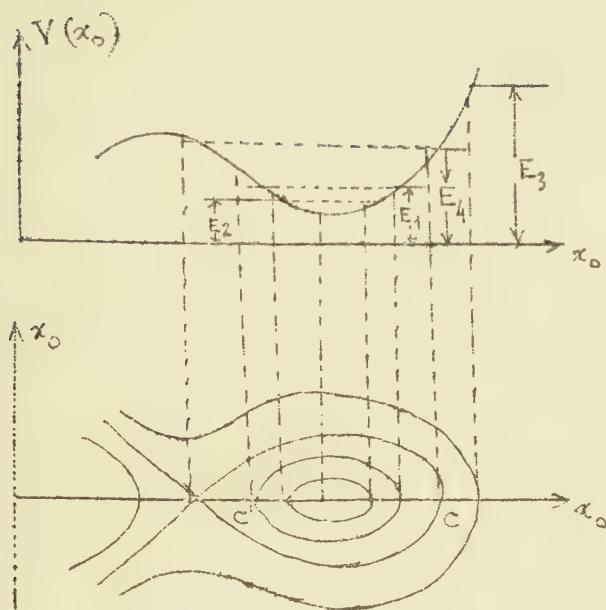


Fig. 5.3

Aux états d'équilibre stable correspondent des points singuliers (critiques) de l'équation (5.2), appelés centre, et aux états d'équilibre instable correspondent des points singuliers appelés col. Donc, s'il existe un domaine de valeurs de c pour lequel la fonction (5.7) a une racine plus petite que c (pour $F(c) > 0$) - ce que l'on supposera - alors, pour ces valeurs de c , la fonction (5.4) sera périodique. Par conséquent, l'équation (5.2) admettra une famille de solutions périodiques (5.4) qui dépend de deux constantes arbitraires. La période de ces solutions, définie par (5.8) dépendra de c .

Désignons par c_m la valeur de c qui satisfait à l'équation :

$$(5.9) \quad T(c_m) = \frac{\omega}{m}$$

m étant un nombre entier quelconque, ω la période du membre droite de l'équation (5.1) (qui n'est pas obligatoirement la plus petite période). Pour chaque valeur c_m on obtient une famille de solutions périodiques, de période ω :

$$(5.10) \quad x_0 = x_0(t + h, c_m)$$

des équations (5.2), solutions qui dépendent d'un paramètre arbitraire h .

En considérant ces solutions comme solutions génératrices, on peut trouver pour elles les solutions périodiques de

l'équation (5.1).

On étudiera d'abord l'équation aux variations.

L'équation aux variations, pour une solution quelconque de la famille (5.10), a la forme :

$$(5.11) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + F'(x_0) y = 0 \quad ; \quad (F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}) .$$

Cette équation a deux solutions particulières :

$$(5.12) \quad y_1 = \dot{x}_0(t+h, c_m) = u(t+h)$$

$$(5.13) \quad y_2^* = \left(\frac{\partial x_0(t+h, c)}{\partial c} \right)_{c=c_m}$$

dont la solution u sera périodique, mais y_2^* ne sera pas périodique, car la fonction (5.4) dépend de c . On étudiera la forme de y_2^* . Dans ce but, on remplace dans la fonction $x_0(t+h, c)$ la variable t par τ , à l'aide de la substitution:

$$(5.14) \quad t + h = \frac{(\tau + h) T(c)}{\omega}$$

et l'on désigne la fonction obtenue ainsi par $x_0^*(\tau, c)$. La fonction x_0^* sera périodique de période τ par rapport à c . En dérivant cette fonction par rapport à c , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0^*}{\partial c} &= \frac{\partial}{\partial c} x_0 \left(\frac{(\tau + h) T}{\omega}, c \right) = \frac{\partial x_0(t+h, c)}{\partial c} + \frac{\tau + h}{\omega} \frac{dT}{dc} \dot{x}_0(t+h, c) = \\ &= \frac{\partial x_0(t+h, c)}{\partial c} + \frac{t+h}{T} \frac{dT}{dc} \dot{x}_0(t+h, c) \end{aligned}$$

En faisant ici $c = c_m$, de (5.12), (5.13) et (5.9), on trouve :

$$(5.15) \quad y_2^* = -\frac{m}{\omega} \frac{dT}{dc} \left\{ (t+h) u(t+h) + v(t+h) \right\} \quad \text{où}$$

$$(5.16) \quad v(t+h) = -\frac{\omega}{m} \left\{ \frac{1}{\frac{dT}{dc}} \frac{\partial x_0^*}{\partial c} \right\}_{c=c_m} = -\frac{\omega}{m} \left\{ \frac{1}{\frac{dT}{dc}} \frac{\partial}{\partial c} x_0 \left(\frac{(\tau + h) T}{\omega}, c \right) \right\}_{c=c_m}$$

est une fonction périodique de période ω par rapport à t .

De (5.15) et (5.12) on trouve que l'équation (5.11) a aussi la solution particulière :

$$(5.17) \quad y_2 = t u(t+h) + v(t+h)$$

qu'on prend, à côté de (5.12) comme solution de départ.

On peut facilement démontrer les propriétés suivantes des fonctions u et v .

1) La fonction u est une solution de l'équation aux variations (5.11) satisfaisant aux conditions initiales (pour $t+h = 0$)

$$(5.18) \quad u(0) = 0 \quad ; \quad \dot{u}(0) = -F(c_m)$$

2) La fonction $v(t+h)$ satisfait à l'équation :

$$(5.19) \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + F'(x_0) v = 2 \dot{u}(t+h)$$

3) De (5.16) et (5.5), on trouve l'égalité :

$$(5.20) \quad v(0) = -\frac{\omega}{m} \left\{ \frac{1}{\frac{dT}{dc}} \frac{\partial x_0(0, c)}{\partial c} \right\}_{c=c_m} = -\frac{\omega}{m \left(\frac{dT}{dc} \right)_{c=c_m}}$$

4) On trouve aussi l'égalité :

$$(5.21) \quad u^2 + u \dot{v} - \dot{u} v = K = \text{const}$$

De (5.18) et (5.20), on trouve directement :

$$(5.22) \quad K = -\frac{\omega F(c_m)}{m \left(\frac{dT}{dc} \right)_{c=c_m}}$$

Considérons l'équation non homogène :

$$(5.23) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + F'(x_0) z = f(t)$$

Par vérification directe ou par la méthode de la variation des constantes arbitraires, on voit que la solution générale de l'équation (5.23) peut être mise sous forme :

$$(5.24) \quad K z = u \int_0^t \left(\int_0^t u f dt - v f - \beta \right) dt + v \left(\int_0^t u f dt - \beta \right) + \alpha u$$

β, α , étant des constantes arbitraires.

Si $f(t)$ est une fonction périodique de période ω , pour que l'équation (5.23) admette une solution périodique, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition :

$$(5.25) \quad \int_0^{\omega} u f dt = 0$$

En effet, si la relation (5.25) est satisfaite, le coefficient de v dans l'expression (5.24) sera périodique. L'expression qui se trouve dans les parenthèses du premier terme sera aussi périodique. Par conséquent, si la constante est choisie, de sorte que :

$$(5.26) \quad \beta = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} v f dt + \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} dt \int_0^t u f dt$$

(c'est-à-dire la valeur moyenne de l'expression, qui se trouve sous l'intégrale extérieure du premier terme s'annule), la solution (5.24) sera périodique. Dans ce cas, α reste une constante arbitraire. Bien entendu, on peut obtenir aussi la condition (5.25) des conditions générales de périodicité, si l'on considère que l'équation (5.11) est auto-adjointe. (Dans ce cas, la fonction u est aussi une solution périodique de l'équation adjointe à (5.11)).

On cherchera ensuite la solution périodique de l'équation (5.1) qui se réduit à la solution génératrice (5.10) pour $\mu = 0$. Suivant la méthode du paragraphe 3, on cherchera la solution sous forme de la série :

$$(5.27) \quad x = x_0(t+h, c_m) + \mu x_1(t) + \dots$$

Pour déterminer x_1 , nous avons l'équation :

$$(5.28) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} + F'(x_0) x_1 = f_1(x_0, \dot{x}_0, t) = F_1(t)$$

La condition de périodicité (5.25), en vertu de (5.12), donne :

$$(5.29) \quad P(h) = \int_0^{\omega} f_1 \left[x_0(t+h, c_m), \dot{x}_0(t+h, c_m), t \right] \dot{x}_0(t+h, c_m) dt = 0$$

Cette équation sert à déterminer la constante h . Supposons que h soit choisie conformément à cette équation et que $P'(h) \neq 0$. Alors, pour x_1 , en vertu de (5.24) et (5.26), on aura :

$$(5.30) \quad x_1 = \frac{1}{K} \left[u \int_0^t \left(\int_0^t u F_1 dt - v F_1 - \beta_1 \right) dt + \right. \\ \left. + v \left(\int_0^t u F_1 dt - \beta_1 \right) + \alpha_1 u \right]$$

où

$$\beta_1 = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} v F_1 dt + \frac{1}{\omega} \int_0^u dt \int_0^t u F_1 dt \quad \text{et } \alpha_1 \text{ est une}$$

constante arbitraire. On la détermine par la condition de périodicité de x_2 . Dans ce cas, on vient de le montrer dans le paragraphe 3, l'équation sera linéaire par rapport à α_1 .

De la même manière, on détermine les autres approximations.

On remarque que pour calculer effectivement la fonction $x_0(t+h, c)$ et sa période $T(c)$, on n'a pas besoin d'utiliser les formules (5.6) et (5.8). Habituellement, en pratique, il est préférable d'utiliser certaines méthodes approximatives qui donnent la fonction x_0 déjà développée en série de FOURIER.

Une étude détaillée du problème des solutions périodiques de l'équation (5.1) a été faite par A.M. KAC [48] (pour l'équation $\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = \xi f(t)$, voir LOUD [60]), qui a aussi étudié le cas spécial (critique) lorsque l'équation (5.28) est satisfaite identiquement. A.M. KAC a également indiqué les conditions de la stabilité, tant pour le cas non critique que pour le cas critique (On peut trouver l'application de la théorie de KAC chez DROZDOV).

VI - CONDITIONS DE STABILITE DE LA SOLUTION PERIODIQUE ETUDIEE DANS LE PARAGRAPHE PRECEDENT.

Pour résoudre le problème de stabilité de la solution périodique (5.27), on forme l'équation aux variations correspondantes :

$$(6.1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + F'(x_0) y + \mu \left\{ \left[F''(x_0) x_1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \right] y - \left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right) \frac{dy}{dt} \right. \\ \left. + \dots = 0 \right.$$

où le développement contient seulement les termes linéaires par rapport à μ ; les dérivées de la fonction f_1 sont calculées pour la solution génératrice $x = x_0(t+h, c_m)$.

L'équation (6.1) se réduit à l'équation (5.11) pour $\mu = 0$, qui - comme on l'a déjà vu - possède deux solutions périodiques indépendantes (5.12) et (5.17). Par conséquent, les deux exposants de l'équation (6.1) seront nuls pour $\mu = 0$, et pour cela, il faut les calculer plus exactement. Dans ce cas, nous ne pouvons pas utiliser les résultats de MALKIN [67, p. 396, 97], car la forme des solutions (5.12) et (5.17) nous montre qu'à l'exposant caractéristique de l'équation (5.11) correspond, non pas deux, mais un seul groupe de solutions [105, p. 502] et [67, pp. 201 et 220]. Par conséquent, les exposants caractéristiques de l'équation (6.1) seront développés selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ (en général). Soit

$$(6.2) \quad \lambda_1 = \alpha_1 \sqrt{\mu} + \alpha_2 \mu + \alpha_3 (\sqrt{\mu})^3 + \dots$$

le développement d'un des exposants caractéristiques de la solution de (6.1). On voit facilement que si ce développement contient vraiment les puissances fractionnaires $\sqrt{\mu}$, le développement du deuxième exposant caractéristique λ_2 aura la forme:

$$(6.3) \quad \lambda_2 = -\alpha_1 \sqrt{\mu} + \alpha_2 \mu - \alpha_3 (\sqrt{\mu})^3 + \dots$$

En effet, soit

$$\rho^2 - 2A\rho + B = 0$$

l'équation caractéristique de (6.1). Etant donné que pour $\mu = 0$ cette équation doit avoir une racine double égale à 1, il faut avoir les développements suivants :

$$A = 1 + a_1 \mu + \dots ; \quad B = 1 + b_1 \mu + \dots ; \quad A^2 - B = c_K \mu^K + \dots$$

et par conséquent

$$(6.4) \quad \rho_{1,2} = 1 + a_1 \mu + \dots \pm \sqrt{c_K} (\sqrt{\mu})^K (1 + \beta_1 \mu + \dots)$$

où les termes non écrits contiennent seulement des puissances entières de μ . Donc, si les développements contiennent des puissances fractionnaires de μ , autrement dit, si le nombre k est impair, alors l'un des développements s'obtient de l'autre, en remplaçant $\sqrt{\mu}$ par $-\sqrt{\mu}$. Mais alors, la même chose est valable pour le développement (6.2) ou (6.3), des exposants caractéristiques).

De (6.2) et (6.3), on voit directement que, pour la stabilité, il faut que la partie réelle du coefficient α_1

soit nulle. Si l'on satisfait à cette condition, le signe des parties réelles des quantités λ_1 et λ_2 sera donné par le coefficient α_2 . De (6.4), on voit que le coefficient α_2 sera toujours réel, tandis que le coefficient α_1 sera réel, soit purement imaginaire. D'ici on arrive aux conditions nécessaires suivantes de la stabilité :

$$(6.5) \quad \alpha_1^2 \leq 0, \quad \alpha_2 \leq 0$$

Si ces conditions sont satisfaites avec des inégalités au sens strict, pour μ suffisamment petit, la stabilité aura lieu et sera asymptotique.

Pour déterminer les coefficients α_1 et α_2 , on transformera (6.1) à l'aide de la substitution $y = e^{\lambda t} z$ et on cherchera les quantités α_i à partir des conditions de l'existence de la solution périodique de l'équation ainsi obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} + F'(x_0)z + 2\sqrt{\mu} \alpha_1 \frac{dz}{dt} + \mu \left\{ \left[F''(x_0)x_1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \alpha_1^2 \right] z + \right. \\ \left. + \left[- \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + 2\alpha_2 \right] \frac{dz}{dt} + \dots \right\} = 0 \end{aligned}$$

On cherchera la solution périodique sous forme de la série :

$$z = z_0 + \sqrt{\mu} z_1 + \mu z_2 + \dots$$

et par conséquent on aura :

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} + F'(x_0) z_0 = 0$$

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + F'(x_0) z_1 = - z_0 \alpha_1 \frac{dz_0}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_2}{dt^2} + F'(x_0) z_2 = - z_0 \alpha_1 \frac{dz_1}{dt} - \left[F''(x_0)x_1 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + \alpha_1^2 \right] z_0 - \\ - \left[- \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + 2\alpha_2 \right] \frac{dz_0}{dt} = \psi(t) \end{aligned}$$

Pour z_0 et z_1 , en vertu de (5.19), on trouve :

$$z_0 = M_0 u \quad , \quad z_1 = \alpha_1 M_0 v + M_1 u$$

où M_0 et M_1 sont des constantes arbitraires. En conséquence, la condition de périodicité de la fonction z_2 - Voir (5.25) -

$$\int_0^{\omega} \psi(t) u \, dt \equiv \int_0^{\omega} \psi(t) \dot{x}_0 \, dt = 0$$

nous donne :

$$(6.6) \quad \alpha_1^2 \int_0^{\omega} (u^2 + 2 u \dot{v}) \, dt + \int_0^{\omega} \left[F''(x_0) x_1 \dot{x}_0^2 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \dot{x}_0^2 - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \dot{x}_0 \ddot{x}_0 \right] \, dt = 0$$

mais, en vertu de (5.21) :

$$(6.7) \quad \int_0^{\omega} (u^2 + 2 u \dot{v}) \, dt \equiv \int_0^{\omega} (u^2 + u \dot{v} - \dot{u} v) \, dt = \omega K$$

et, d'après (5.28) :

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \int_0^{\omega} F''(x_0) x_1 \dot{x}_0^2 \, dt &= - \int_0^{\omega} F'(x_0) (\dot{x}_1 \dot{x}_0 + x_1 \ddot{x}_0) \, dt = - \\ &= - \int_0^{\omega} \left[F'(x_0) x_1 \ddot{x}_0 - F(x_0) \ddot{x}_1 \right] \, dt = - \int_0^{\omega} \ddot{x}_0 \left[x_1 + F'(x_0) x_1 \right] \, dt = \\ &= - \int_0^{\omega} f_1(x_0, \dot{x}_0, t) \ddot{x}_0 \, dt \end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (6.6) prend la forme :

$$\omega K \alpha_1^2 = \int_0^{\omega} \left[f_1(x_0, \dot{x}_0, t) \ddot{x}_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \dot{x}_0^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x}_0 \ddot{x}_0 \right] \, dt$$

d'où, en considérant (5.29), on obtient :

$$(6.9) \quad \alpha_1^2 = \frac{1}{\omega K} \frac{dP(h)}{dh}$$

On déterminera le coefficient α_2 par la condition de périodicité de la fonction z_3 . Cependant, on peut le déterminer plus simplement. En effet, la somme des exposants caractéristiques de chaque système des équations linéaires à coefficients périodiques $\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^n p_{si} x_i$ (dont l'équation caractéristique est : $\rho^2 + A_1 \rho^{n-1} + \dots + A_n = 0$) en vertu de la formule

$$(-1)^n A_n = e \int_0^{\omega} \sum_{s=1}^n p_{ss} dt$$

sera donnée par l'égalité :

$$\omega \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} = \int_0^{\omega} \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha\alpha} dt$$

En appliquant cette égalité à l'équation (6.1), on obtient :

$$\omega (\lambda_1 + \lambda_2) = \mu \int_0^{\omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

d'où, par comparaison avec (6.2) et (6.3), on trouve

$$(6.10) \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\omega} \int_0^{\omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

En ramenant (6.9) et (6.10) en (6.5), on trouve enfin les conditions suivantes de stabilité de la solution (5.27) (de l'équation (5.1)) :

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} K \frac{dP}{dn} \leq 0 \\ \int_0^{\omega} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right) dt \leq 0 \end{array} \right.$$



B) SYSTEME DE LIAPOUNOFF.

=====

--:-

I - GENERALITES.

Dans son ouvrage "Problème général de la stabilité du mouvement" [61], dans l'un des cas critiques, A.M. LIAPOUNOFF a démontré l'existence d'une famille de solutions périodiques dans le cas d'un système spécial d'équations différentielles non linéaires, et a indiqué la méthode de leurs calculs.

Ces systèmes, appelés systèmes de LIAPOUNOFF, ont une grande application pratique, car beaucoup de problèmes de la mécanique et de l'astronomie se réduisent à eux. En particulier, le problème des vibrations libres des systèmes conservatifs dans le voisinage de l'équilibre ou dans le voisinage du mouvement stationnaire, lorsqu'on considère aussi les termes supérieurs dans le développement des énergies cinétique et potentielle, se réduit au calcul des solutions périodiques des systèmes de LIAPOUNOFF.

D'autre part, dans la section précédente, on a vu que l'efficacité des méthodes exposées pour déterminer les vibrations des systèmes approchés d'un système non linéaire quelconque s'appuie sur la possibilité de calcul, sinon de la solution générale, du moins de la solution périodique du système générateur. Cela limite dans une grande mesure le choix du système générateur. Mais on peut prendre, d'une façon générale, les systèmes de LIAPOUNOFF comme système générateur.

Considérons le système d'équations différentielles d'ordre n :

$$(1.1) \quad \frac{dx_s}{dt} = a_{s1} x_1 + \dots + a_{sn} x_n + X_s^*(x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n)$$

X_s^* sont ici des fonctions analytiques des variables $x_1, \dots, x_n$ (dans le voisinage du point $x_s = 0$), dont les développements commencent par des termes de degré non inférieur au second ; a_{sj} sont des constantes.

(1.2) 1°) Supposons que l'équation déterminante

$$|a_{ij} - p \delta_{ij}| = 0$$

ait deux racines purement imaginaires conjuguées : $\pm \lambda i$;

($i = \sqrt{-1}$). En introduisant, au lieu de deux fonctions inconnues les variables x et y , nous amènerons le système proposé à la forme suivante :

$$(1.3) \quad \frac{dx}{dt} = -\lambda y + X \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y$$

$$\frac{dx_s}{dt} = b_{s1} x_1 + \dots + b_{sn} x_n + a_s x + b_s y + X_s$$

$$(s = 1, \dots, m, \quad m = n - 2)$$

X, Y, X_s sont ici des fonctions analytiques des variables $x_1, \dots, x_m, x, y$ dont les développements commencent par des termes de degré non inférieur au second et possèdent des coefficients réels constants, et b_{sj}, a_s, b_s sont des constantes réelles parmi lesquelles les b_{sj} sont telles que l'équation

$$(1.4) \quad D(\rho) = \begin{vmatrix} b_{11} - \rho & b_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

n'a ni des racines de la forme $\pm \lambda i$ (p étant un entier réel), ni des racines nulles (cela n'exclut pas la possibilité que l'équation (1.4) ait des racines purement imaginaires différentes de $\pm p \lambda i$) ($i = \sqrt{-1}$).

2°) Supposons que la paire de racines conjuguées $\pm \lambda i$ soit simple, dont les multiples entiers ne soient pas des racines et que l'équation déterminante n'ait pas de racines nulles.

Dans les hypothèses . faites en utilisant une substitution linéaire à coefficients constants convenablement choisis

$$\bar{x}_s = x_s + \alpha_s x + \beta_s y, \quad (s = 1, \dots, m), \quad \text{ou}$$

$$(1.5) \quad b_{s1} \alpha_1 + \dots + b_{sm} \alpha_m - \lambda \beta_s = a_s$$

$$b_{s1} \beta_1 + \dots + b_{sm} \beta_m + \lambda \alpha_s = b_s$$

de telle façon que tous les a_s, b_s , soient nuls, nous ramènerons le système à la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \dots, x_m) \\
 (1.6) \quad \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \dots, x_m) \\
 \frac{dx_s}{dt} &= b_{s1} x_1 + \dots + b_{sm} x_m + X_s(x, y, x_1, \dots, x_m)
 \end{aligned}$$

3°) Supposons enfin que le système considéré admette une intégrale analytique de x, y, x_s , indépendante de t , de la forme

$$(1.7) \quad H(x, y, x_1, \dots, x_m) = \text{const}$$

H est une fonction analytique des $x, y, x_1, \dots, x_m$ dont le développement suivant les puissances de ces variables commence par des termes non inférieurs au second ; les derniers termes ne s'annulent pas pour $x_1 = \dots = x_n = 0$.

On peut démontrer [67] que l'intégrale $H = \text{const}$ se ramène à la forme suivante :

$$(1.8) \quad H = x^2 + y^2 + W(x_1, \dots, x_n) + S(x, y, x_1, \dots, x_n) = \text{const}$$

W est une forme quadratique de $x_1, \dots, x_n$ et S est une fonction analytique des $x, y, x_1, \dots, x_m$ dont le développement commence par des termes de degré non inférieur au troisième.

Définition : Les systèmes d'équations différentielles de la forme (1.1) qui satisfont aux trois conditions montrées plus haut, seront appelés "systèmes de LIAPOUNOFF". (Voir aussi 84 , 87)

II - SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES DE LIAPOUNOFF.

Pour démontrer l'existence des solutions périodiques des systèmes de LIAPOUNOFF, on fait la substitution :

$$(2.1) \quad x = \rho \cos \theta ; \quad y = \rho \sin \theta ; \quad x_s = \rho z_s \quad (s = 1, \dots, m)$$

De cette manière, le système transformé sera de la forme :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \rho^2 R(\rho, z_j, \theta) ; & \frac{d\theta}{dt} = \lambda + \rho \theta(\rho, z_j, \theta) \\ \frac{dz_s}{dt} = b_{s1} z_1 + \dots + b_{sm} z_m + \rho Z_s(\rho, z_j, \theta) \end{cases} \quad (s=1, \dots, m)$$

où R, θ, Z_s sont des fonctions analytiques des variables $\rho, z_1, \dots, z_m$ dont les développements commencent par des termes de degré non inférieur au second et possèdent des coefficients périodiques de période 2π (polynômes en $\sin \theta$ et $\cos \theta$) relativement à θ . D'ailleurs, $|\rho|, |z_s|$ étant au-dessous de certains nombres finis, leurs développements seront uniformément convergents pour toutes les valeurs réelles de θ .

En éliminant la variable t de (2.2) et en utilisant l'intégrale (1.8), on peut ramener le système (2.2) d'ordre $(m+2)$ à un système d'ordre m . En effet, on a d'abord :

$$(2.3) \quad \frac{dz_s}{d\theta} = c_{s1} z_1 + \dots + c_{sm} z_m + \rho Z_s^* (\rho, z_j, \theta) \quad \text{où}$$

$$(2.4) \quad c_{sj} = \frac{b_{sj}}{\lambda}$$

et Z_s^* des fonctions du même type que Z_s .

En désignant par μ^2 la constante arbitraire de l'intégrale (1.8) et en faisant ici $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ nous en tirerons la suivante :

$$(2.5) \quad \rho^2 [1 + F(\rho, z_j, \theta)] = \mu^2$$

où F est une fonction analytique des $\rho, z_1, \dots, z_n$ qui s'annule pour $\rho = z_1 = \dots = z_n = 0$. Les coefficients de son développement sont des polynômes en $\sin \theta$ et $\cos \theta$. Si l'on prend la racine carrée de (2.5), on obtient :

$$(2.6) \quad \rho [1 + F^*(\rho, z_j, \theta)] = \pm \mu$$

où F^* est une fonction du même type que F . Etant donné que μ est une constante arbitraire (sans restreindre la généralité), on peut toujours prendre devant celle-ci le signe plus. En résolvant (2.6) par rapport à ρ , on trouve :

$$\rho = \mu [1 + G(\mu, z_j, \theta)]$$

où G est une fonction analytique des variables $\mu, z_1, \dots, z_m$ de même type que F .

En remplaçant ρ dans les équations (2.3), on obtient le système suivant d'ordre m :

$$(2.7) \quad \frac{dz_s}{d\theta} = c_{s1} z_1 + \dots + c_{sm} z_m + \mu U_s(\mu, z_j, \theta) \quad (s = 1, \dots, m)$$

qui déterminera les quantités z_s comme fonctions de θ . Ici U_s sont des fonctions de même type que G , c'est-à-dire des fonctions analytiques par rapport aux $\mu, z_1, \dots, z_m$ et périodiques par rapport à θ .

Etant donné que l'équation (1.4) n'a ni des racines de la forme $\pm p \lambda i$ (p étant un entier réel), ni des racines non nulles, alors l'équation

$$(2.8) \quad \begin{vmatrix} c_{11} - \rho & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{22} & c_{22} - \rho & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

en vertu de (2.4) n'a pas de racines de la forme $\pm p i$. Il en résulte que le système (2.7) est un cas particulier des systèmes étudiés par MALKIN [67, chap. II, par.5]. C'est pourquoi il admet, pour les valeurs de μ suffisamment petites, une solution périodique qui se réduit à la solution génératrice pour $\mu = 0$ (Dans le cas particulier considéré, la solution génératrice est la solution $z_1^0 = \dots = z_n^0 = 0$ du système

$$\frac{dz_s^0}{d\theta} = c_{s1} z_1^0 + \dots + c_{sm} z_m^0$$

auquel se réduit (2.7) pour $\mu = 0$). Cette solution sera analytique par rapport à μ et on peut l'écrire :

$$(2.9) \quad z_s = \mu z_s^{(1)}(\theta) + \mu^2 z_s^{(2)}(\theta) + \dots \quad (s = 1, \dots, m)$$

où $z_s^{(k)}$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport à θ . En remplaçant (2.9) dans l'expression de ρ on voit que ρ est aussi une fonction périodique de θ , de la forme :

$$(2.10) \quad \rho = \mu + \mu^2 \rho^{(2)}(\theta) + \mu^3 \rho^{(3)}(\theta) + \dots$$

$\rho^{(k)}$ étant des fonctions périodiques de période 2π , par rapport à θ .

En conclusion, si on prend θ comme variable indépendante, on a démontré l'existence de la solution périodique du système (2.2). Cette solution dépend analytiquement de la cons-

tante arbitraire μ . En remplaçant (2.9) et (2.10) dans (2.1), on obtient la solution particulière des équations (1.6) dont les quantités x, y, x_s sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport à θ , et analytique par rapport à μ .

Nous allons démontrer que par rapport à t , la solution obtenue sera aussi périodique et elle sera analytique par rapport à μ . La période de la solution sera une fonction analytique de μ . Dans ce but, considérons la deuxième équation de (2.2) qui détermine θ . En y remplaçant les valeurs trouvées de ρ et z_s , on obtiendra :

$$t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\lambda + \rho \theta} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\theta \left[1 + \mathcal{H}_1(\theta) \mu + \mathcal{H}_2(\theta) \mu^2 + \dots \right] d\theta$$

où $\mathcal{H}_K$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport à θ et la série, qui se trouve sous l'intégrale, converge pour les valeurs suffisamment petites de μ . La constante d'intégration a été choisie de sorte qu'au moment initial ($t = 0$), θ s'annule aussi.

On remarque que la différence

$$t(\theta + 2\pi) - t(\theta) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\theta+2\pi} (1 + \mathcal{H}_1 \mu + \mathcal{H}_2 \mu^2 + \dots) d\theta$$

est une constante qui ne dépend pas de θ , égale à

$$(2.11) \quad T = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu^2 + \dots) \quad \text{où}$$

$$\alpha_K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_K(\theta) d\theta, \quad (K = 1, 2, \dots)$$

Il en résulte que chaque fonction périodique de période 2π par rapport à θ , sera aussi une fonction périodique par rapport à t et aura la période T . En particulier, les fonctions x, y, x_s qui donnent la solution particulière dont nous avons parlé précédemment, seront aussi des fonctions périodiques de période T , par rapport à t .

De l'expression (2.11), on déduit que la période T est une fonction analytique par rapport à μ , qui se réduit à $\frac{2\pi}{\lambda}$ pour $\mu = 0$.

Nous allons démontrer que les fonctions x, y, x_s ,

exprimées par t , seront aussi des fonctions analytiques par rapport à μ .

En effet, comme on le sait déjà, les fonctions x, y, x_s , qui donnent la solution de l'équation (1.6), sont des fonctions analytiques de leurs valeurs initiales. Mais, à leur tour, ces valeurs initiales, en remplaçant dans les formules (2.1), (2.9) et (2.10), θ par zéro, seront des fonctions analytiques de μ . Il en résulte alors directement la véracité de notre affirmation.

Soit c la valeur initiale de la quantité ρ . De (2.10), on aura :

$$(2.12) \quad c = \mu + \mu^2 \rho^{(2)}(0) + \dots$$

qui montre que c est une fonction analytique de μ , qui s'annule en même temps que μ . En résolvant (2.12), par rapport à c , on voit que μ , à son tour, est une fonction analytique de c , qui s'annule pour $c = 0$. Dans la solution périodique obtenue, nous pouvons remplacer μ par son expression comme fonction de c et alors cette solution, aussi bien que sa période, seront des fonctions analytiques de c .

Du fait que θ s'annule pour $t = 0$, il résulte que la quantité c coïncide avec la valeur initiale de la quantité x et la valeur initiale de y sera nulle. En outre, de (2.1), il résulte que les quantités x, y, x_s s'annulent aussi pour

$c = 0$. On arrive ainsi au théorème : Dans un voisinage suffisamment petit de l'origine, le système de LIAPOUNOFF (1.6) admet une solution périodique qui dépend d'un paramètre arbitraire. Ce paramètre, supposé petit, représente la valeur initiale de x . La valeur initiale de y est égale à zéro. Les valeurs initiales des quantités x_s sont des fonctions analytiques de c .

La période de la solution est une fonction analytique de c , qui se réduit à $\frac{2\pi}{\lambda}$ pour $c = 0$. La solution même est aussi une fonction analytique de c qui se réduit à la solution triviale $x = y = x_1 = \dots = x_m = 0$, pour $c = 0$.

Etant donné que le système (1.6) est autonome, dans la solution considérée, nous pouvons alors remplacer t par $t + h$, où h est une constante arbitraire, et nous obtiendrons ainsi une solution périodique qui dépend de deux constantes arbitraires.

III - METHODE PRATIQUE DE CALCUL DES SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES DE LIAPOUNOFF.

Soit :

$$(3.1) \quad T = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots)$$

la période de la solution cherchée, où h_j sont des constantes inconnues, mais qu'on peut déterminer.

Dans les équations (1.6), en remplaçant la variable t par τ à l'aide de la substitution

$$t = \frac{\tau}{\lambda} (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots)$$

on obtiendra un nouveau système de la forme :

$$\frac{dx}{d\tau} = (-y + \frac{1}{\lambda} X) (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots)$$

$$(3.2) \quad \frac{dy}{d\tau} = (x + \frac{1}{\lambda} Y) (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots)$$

$$\frac{dx_s}{d\tau} = (c_{s1} x_1 + \dots + c_{sm} x_m + \frac{1}{\lambda} X_s) (1 + h_1 c + h_2 c^2 + \dots)$$

$$(s = 1, \dots, m)$$

Maintenant, à la solution périodique cherchée, de période T , des équations (1.6), correspond une solution périodique des équations (3.2), qui aura la période 2π . Cette dernière solution sera aussi analytique par rapport à c et, par conséquent, elle aura la forme :

$$x = c x^{(1)}(\tau) + c^2 x^{(2)}(\tau) + \dots$$

$$(3.3) \quad y = c y^{(1)}(\tau) + c^2 y^{(2)}(\tau) + \dots$$

$$x_s = c x_s^{(1)}(\tau) + c^2 x_s^{(2)}(\tau) + \dots$$

où $x^{(K)}$, $y^{(K)}$, $x_s^{(K)}$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport à τ , satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$(3.4) \quad x^{(1)}(0) = 1, \quad x^{(2)}(0) = x^{(3)}(0) = \dots = y^{(1)}(0) = y^{(2)}(0) = \dots = 0$$

En remplaçant les développements (3.3) dans (3.2) et en égalant les coefficients des mêmes puissances de c , on trouve les équations qui déterminent les coefficients

$x^{(K)}$, $y^{(K)}$, $x_s^{(K)}$. En particulier, on aura :

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau} = y^{(1)} , \quad \frac{dy^{(1)}}{d\tau} = x^{(1)} , \quad \frac{dx_s^{(1)}}{d\tau} = c_{s1} x_1^{(1)} + \dots + c_{sm} x_m^{(1)}$$

Etant donné que l'équation déterminante (2.8) n'a pas de racines de la forme $\pm p i$, où p est un entier ou zéro, le système $x_s^{(1)}$ a une solution unique, périodique, égale à $x_s^{(1)} = \dots = x_m^{(1)} = 0$. En vertu de (3.4), on trouve aussi :

$$x^{(1)} = \cos \tau , \quad y^{(1)} = \sin \tau$$

On aura ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(2)}}{d\tau} &= -y^{(2)} - h_1 \sin \tau + X^{(2)}(\tau) \\ (3.5) \quad \frac{dy^{(2)}}{d\tau} &= x^{(2)} + h_1 \cos \tau + Y^{(2)}(\tau) \\ \frac{dx_s^{(2)}}{d\tau} &= c_{s1} x_1^{(2)} + \dots + c_{sm} x_m^{(2)} + X_s^{(2)} \end{aligned}$$

où $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$, $X_s^{(2)}$ sont des fonctions périodiques de période 2π , par rapport à τ .

Dans nos suppositions (2.8), le système qui définit $x_s^{(2)}$ admet une solution périodique bien déterminée.

Pour que $x^{(2)}$ et $y^{(2)}$ soient périodiques, il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} 2 h_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [X^{(2)}(\tau) \sin \tau - Y^{(2)}(\tau) \cos \tau] d\tau \\ (3.6) \quad 0 &= \int_0^{2\pi} [X^{(2)}(\tau) \cos \tau + Y^{(2)}(\tau) \sin \tau] d\tau . \end{aligned}$$

La première condition (3.6) détermine uniquement la constante h_1 . Si la deuxième condition est satisfaite identiquement, alors (3.5) auront une solution périodique pour $x^{(2)}$

et $y^{(2)}$, dans le cas contraire, une telle solution n'existera pas. Mais comme nous avons démontré l'existence au moins d'un système de séries satisfaisant formellement aux équations (3.2), alors la deuxième condition (3.6) est nécessairement satisfaite. Par conséquent, les équations (3.5) admettent, pour $x^{(2)}$ et $y^{(2)}$ une solution périodique de la forme :

$$x^{(2)} = A \cos \tau + B \sin \tau + \psi_2(\tau)$$

$$y^{(2)} = A \sin \tau - B \cos \tau + \psi_2(\tau)$$

où ψ_2 et ψ_2 sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport à τ et A, B sont des constantes arbitraires qui seront déterminées par les conditions initiales (3.4).

On remarque que la constante h_1 sera toujours égale à zéro, car les fonctions $x^{(2)}$ et $y^{(2)}$ représentent des formes quadratiques par rapport aux $\cos \tau$ et $\sin \tau$. On peut démontrer, en général, que la première constante non nulle h_j a toujours un indice pair.

Supposons maintenant que tous les $x^{(j)}, y^{(j)}, x_s^{(j)}$, pour lesquels $j < K$ et tous les h_j pour lesquels $j < K-1$ soient déjà trouvés. Alors, pour la recherche de $x^{(K)}, y^{(K)}, x_s^{(K)}$, on aura les équations :

$$\frac{dx^{(K)}}{d\tau} = -y^{(K)} - h_{K-1} \sin \tau + X^{(K)}(\tau)$$

$$\frac{dy^{(K)}}{d\tau} = x^{(K)} + h_{K-1} \cos \tau + Y^{(K)}(\tau)$$

$$\frac{dx_s^{(K)}}{d\tau} = c_{s1} x_1^{(K)} + \dots + c_{sm} x_m^{(K)} + X_s^{(K)}(\tau)$$

où $X^{(K)}, Y^{(K)}, X_s^{(K)}$ sont certaines fonctions connues périodiques de période 2π par rapport à τ . Les équations qui définissent $x_s^{(K)}$ auront une solution unique, périodique de τ . Pour obtenir les $x^{(K)}$ et $y^{(K)}$ périodiques, il faut et il suffit que les conditions :

$$2 h_{K-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [X^{(K)}(\tau) \sin \tau - Y^{(K)}(\tau) \cos \tau] d\tau ;$$

$$0 = \int_0^{2\pi} \left[x^{(K)}(\tau) \cos \tau + y^{(K)}(\tau) \sin \tau \right] d\tau$$

soient satisfaites

La première condition détermine uniquement la quantité h_{K-1} , et la deuxième condition (parce que les séries (3.3) existent) est satisfaite nécessairement identiquement. Par conséquent, les équations qui déterminent $x^{(K)}$ et $y^{(K)}$ admettent une solution périodique de la forme :

$$x^{(K)} = A_K \cos \tau + B_K \sin \tau + \varphi_K(\tau)$$

$$y^{(K)} = A_K \sin \tau - B_K \cos \tau + \psi_K(\tau)$$

où φ_K et ψ_K sont des fonctions périodiques, de période 2π par rapport à τ , et A_K et B_K sont des constantes arbitraires définies par les conditions initiales (3.4) :

$$A_K = -\varphi_K(0) \quad ; \quad B_K = \psi_K(0)$$

Il en résulte donc qu'il existe un système de séries de la forme (3.3) et un seul, satisfaisant formellement aux équations (3.2). Ces séries seront, par la suite, convergentes et représenteront, vraiment, la solution périodique cherchée.

IV- QUELQUES PROPRIETES DES SOLUTIONS PERIODIQUES DES SYSTEMES DE LIAPOUNOFF.

Considérons d'abord le système du deuxième ordre :

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = -y + X(x,y) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x,y)$$

Doit

$$(4.2) \quad H = x^2 + y^2 + S(x,y) = \text{const}$$

une intégrale première du système (4.1). C'est une fonction analytique des x et y dont le développement commence par des termes de degrés non inférieurs au troisième. Comme nous venons de le démontrer, le système (4.1) admet une solution périodique qui dépend de deux constantes arbitraires, dont une est la valeur initiale de x et l'autre la valeur initiale du temps. Mais étant donné que le système considéré est un système du second ordre, cette solution sera la solution générale de ces

équations. Par conséquent, quelles que soient les valeurs initiales a et b des quantités x et y , la solution des équations (4.1), satisfaisant à ces valeurs initiales, sera périodique. Il faut seulement que $|a|$ et $|b|$ soient suffisamment petites, car les solutions périodiques considérées auparavant existent dans un voisinage assez petit de l'origine.

Considérons le plan de phases pour (4.1). Toutes les trajectoires de phases, qui se trouvent dans un voisinage assez petit de l'origine, seront fermées parce que les solutions correspondantes des équations (4.1) sont périodiques. Par conséquent, de même que pour les équations linéaires correspondantes

$$(4.3) \quad \frac{dx}{dt} = -\lambda y ; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x$$

l'origine est un centre (sommet). Les trajectoires de phases sont déterminées par l'intégrale (4.2), d'où il résulte que ces trajectoires de phases, dans un voisinage assez petit de l'origine, diffèrent un peu des cercles qui représentent les trajectoires de phases des équations (4.3). Ainsi, dans un voisinage assez petit de l'origine, les plans de phases des équations (4.1) et des équations (4.3) diffèrent peu les uns des autres. Néanmoins, il existe une différence essentielle : la période de la révolution pour toutes les trajectoires de phases des équations (4.3) est égale à $\frac{2\pi}{\lambda}$, tandis que pour (4.1) chaque trajectoire de phases a sa propre période de révolution.

Le système de LIAPOUNOFF d'un ordre quelconque $(m+2)$ (16) ainsi que le système du deuxième ordre, a une solution périodique dont les valeurs initiales de x et y sont les valeurs a et b arbitraires, suffisamment petites. Dans ce cas, les valeurs initiales de x_s seront complètement déterminées et seront des fonctions analytiques par rapport à a et b .

Dans ce but, on considère le système aux dérivées partielles :

$$(4.4) \quad \frac{\partial x_s}{\partial x} (-\lambda y + X) + \frac{\partial x_s}{\partial y} (\lambda x + Y) = b_{s1}x_1 + \dots + b_{sm}x_m + X_s$$

définissant les quantités $x_1, \dots, x_m$ comme fonctions des variables x et y .

Chaque fois que l'on pourra satisfaire ce système par des fonctions analytiques

$$(4.5) \quad x_s(x, y) = A_s x + B_s y + C_s x^2 + D_s xy + E_s y^2 + \dots$$

des variables x et y , s'annulant pour $x = y = 0$, la ques-

tion se ramènera à l'étude des équations

$$(4.6) \quad \frac{dx}{dt} = -\lambda y + (X) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + (Y)$$

dans lesquelles (X) et (Y) désignent les résultats de la substitution (4.5) dans les fonctions X et Y.

LIAPOUNOFF a démontré qu'il y a un système de séries (4.5), et un seul, qui satisfait formellement aux équations (4.4). Il a démontré que les séries ainsi obtenues convergent pour les valeurs assez petites de x et y et par conséquent elles représentent véritablement la solution du système (4.4).

Si $x(t,a,b)$, $y(t,a,b)$ est la solution générale de (4.6), alors les fonctions

$$(4.7) \quad x(t,a,b) \quad , \quad y(t,a,b) \quad , \quad x_s \left[x(t,a,b) \quad , \quad y(t,a,b) \right]$$

définiront la solution particulière des équations (1.6) qui contiendra deux constantes arbitraires suffisamment petites. Cette solution sera périodique. Pour démontrer cela, on emploie l'intégrale :

$$(4.8) \quad x^2 + y^2 + W \left[x_1(x,y), \dots, x_n(x,y) \right] + \dots = \text{const.}$$

Remarque : Si l'on fait $a = c$, $b = 0$, dans la solution (4.7), on obtiendra la solution périodique étudiée dans les deux paragraphes précédents. Si l'on remplace t par t+h, où h est une constante arbitraire, on obtiendra une solution périodique qui dépend à nouveau de deux constantes arbitraires : c et h. Cette solution diffère évidemment seulement par le choix des paramètres.

On démontrera que la période T est une fonction analytique de a et b. Considérons d'abord le système (4.1). Si on y remplace $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, on obtient :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \cos \theta X(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \sin \theta Y(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + \frac{1}{\rho} \left[\cos \theta \cdot Y(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \sin \theta X(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right] \end{aligned}$$

Comme on l'a déjà vu (paragraphe 2), la période T sera donnée par la formule :

$$(4.10) \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho}{\lambda \rho + \cos \theta Y(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \sin \theta X(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}$$

dont il faut exprimer ρ comme fonction de θ . Pour exprimer $\rho = \rho(\theta)$, on utilise soit la première équation de (4.9), soit l'intégrale (4.2) qui, dans les variables ρ et θ , sera :

$$(4.11) \quad \rho^2 \left[1 + \frac{1}{\rho^2} S(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right] = \mu^2$$

où μ est une constante arbitraire. De (4.11), on obtient pour ρ deux solutions :

$$(4.12) \quad \rho = \pm \mu + u^{(2)} \mu^2 \pm u^{(3)} \mu^3 + \dots$$

Les coefficients $u^{(K)}$ seront ici des fonctions périodiques de θ , de telle sorte que θ étant remplacé par $\theta + \pi$ tous les $u^{(K)}$ correspondant à K pair, reprennent leurs valeurs primitives avec des signes contraires, et tous les $u^{(K)}$ correspondant à K impair ne changent pas du tout. On s'en assure en remarquant que l'équation (4.11) ne change pas en remplaçant r par $-r$ et θ par $\theta + \pi$. Par suite, chacune des deux solutions (4.12), en y remplaçant μ par $-\mu$ et θ par $\theta + \pi$, donnera pour ρ la valeur primitive avec un signe contraire.

Donc l'intégrale (4.10), représentant la période T , ne changera pas en remplaçant μ par $-\mu$ et par conséquent la période T , qui sera une fonction de μ , sera donnée par la série :

$$(4.13) \quad T = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + H_2 \mu^2 + H_4 \mu^4 + \dots) \quad \text{où}$$

$$(4.14) \quad \mu^2 = a^2 + b^2 + S(a, b).$$

Dans le cas où le système de LIAPOUNOFF est d'un ordre quelconque, la période T est exprimée par une formule analogue à (4.13), mais dont

$$(4.15) \quad \mu^2 = a^2 + b^2 + W \left[x(a, b), \dots, x_m(a, b) \right] + \dots = \\ = a^2 + b^2 + S^*(a, b)$$

Remarque : En faisant $a = c$ et $b = 0$ en (4.13), on obtient (3.1).

C) SYSTEMES VOISINS DES SYSTEMES DE LIAPOUNOFF.

=====

-:-

I - LES SOLUTIONS GENERATRICES.

Considérons les vibrations périodiques des systèmes suivant les équations :

$$(1.1) \quad \frac{dx_s}{dt} = a_{s1} x_1 + \dots + a_{sn} x_n + X_s^*(x_1, \dots, x_n) + \mu f_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (s = 1, \dots, n)$$

X_s^* sont ici des fonctions analytiques des variables $x_1, \dots, x_n$ dont les développements commencent par des termes de degré non inférieur au second ; f_s sont fonctions analytiques des $x_1, \dots, x_n$ et du petit paramètre μ dont les développements, suivant les puissances des $x_1, \dots, x_n$, peuvent contenir aussi bien des termes linéaires que des constantes. Le domaine où X_s^* et f_s sont analytiques est un voisinage quelconque de l'origine. f_s sont des fonctions continues, périodiques, de période 2π par rapport à t et sont développables en séries de Fourier.

Supposons que le système générateur

$$(1.2) \quad \frac{dx_s^0}{dt} = a_{s1} x_1^0 + \dots + a_{sn} x_n^0$$

soit un système de LIAPOUNOFF.

Soit $\pm \lambda i$ la paire de racines purement imaginaires de l'équation déterminante :

$$(1.3) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

qui satisfait aux conditions du paragraphe 1, B). On peut alors ramener le système proposé à la forme suivante :

$$(1.4) \quad \frac{d\xi}{dt} = -\lambda \eta + X(\xi, \eta, \xi_j) ; \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda \xi + Y(\xi, \eta, \xi_j)$$

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} \xi_{\alpha} + X_s(\xi, \eta, \xi_j) ;$$

$$(s = 1, \dots, m), \quad (m = n - 2).$$

L'équation

$$(1.5) \quad \begin{vmatrix} b_{11} - \rho & b_{12} & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} - \rho & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mm} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

n'a pas de racines de la forme $\pm p \lambda i$, p étant un entier réel.

Supposons enfin que le système (1.4) admette une intégrale de la forme

$$(1.6) \quad H = \xi^2 + \eta^2 + W(\xi_1, \dots, \xi_m) + S(\xi, \eta, \xi_1, \dots, \xi_m) = \text{const}$$

avec le même caractère des fonctions désignées par W , S qu'au paragraphe 1, B).

Le système (1.1.) se ramène à la forme :

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, x_j) + \mu f(t, x, y, x_j, \mu) ;$$

$$(1.7) \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, x_j) + \mu F(t, x, y, x_j, \mu) ;$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} x_{\alpha} + X_s(x, y, x_j) + \mu F_s(t, x, y, x_j, \mu) ;$$

$$(s = 1, \dots, m)$$

avec le même caractère des fonctions désignées par X , Y , X_s , f , F , F_s qu'auparavant (1.1.).

Comme nous l'avons vu (section B), le système (1.4) admet une solution périodique dépendant de deux constantes arbitraires c et h , de la forme :

$$\xi = c \cos \tau + c^2 \xi_2(\tau) + \dots \quad \eta = c \sin \tau + c^2 \eta_2(\tau) + \dots$$

$$\xi_s = c \xi_{s1}(\tau) + c^2 \xi_{s2}(\tau) + \dots; \quad \tau = \lambda(t+h)(1+h_2c^2+\dots)^{-1}$$

ξ_K , η_K , ξ_{sK} sont ici des fonctions périodiques de période 2π par rapport à τ , satisfaisant aux conditions :

$$\xi_K(0) = \eta_K(0) = 0 \quad (K = 2, 3, \dots),$$

et h_2, h_3 sont des constantes quelconques, dont la première non nulle est d'indice pair. Les séries (1.8) convergent pour toutes les valeurs de h et pour les valeurs suffisamment petites de c . La période de la solution (1.8) est définie par la formule :

$$(1.9) \quad T = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + h_2 c^2 + \dots)$$

Conformément à la méthode générale, pour trouver les solutions périodiques du système (1.7) - aussi bien que (1.1) - il faudra trouver, tout d'abord, toutes les solutions du système générateur (1.8), qui ont la même période 2π que les seconds membres du système (1.7). De l'expression de la période T (1.9), il résulte que, pour trouver ces solutions, il faudra (en laissant la quantité h arbitraire) déterminer la quantité c de l'équation :

$$(1.10) \quad T = \frac{2\pi}{p}$$

p étant un nombre entier quelconque.

On désignera par c_p le nombre c ainsi obtenu, et la solution génératrice correspondante par :

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \xi^{(p)}(t+h) &= c_p \cos \tau + c_p^2 \xi_2(\tau) + \dots \\ \eta^{(p)}(t+h) &= c_p \sin \tau + c_p^2 \eta_2(\tau) + \dots \\ \xi_s^{(p)}(t+h) &= c_p \xi_{s1}(\tau) + c_p^2 \xi_{s2}(\tau) + \dots \end{aligned}$$

$$\tau = p(t+h)$$

L'équation déterminant c_p a la forme :

$$(1.12) \quad h_{2r} c^{2r} + h_{2r+1} c^{2r+1} + \dots = \frac{\lambda - p}{p}$$

h_{2r} est ici la première constante qui ne s'annule pas. De (1.12) on obtient :

$$(1.13) \quad c + \frac{h_{2r+1}}{2r h_{2r}} c^2 + \dots = a \quad \text{où}$$

$$(1.14) \quad a = \sqrt[2r]{\frac{\lambda - p}{p h_{2r}}}$$

L'équation (1.13) a, pour c , une solution et une seule, analytique par rapport à a , s'annulant pour $a = 0$. Mais étant donné que la quantité a possède $2r$ valeurs, on obtiendra $2r$ solutions de l'équation (1.12), en s'annulant pour $a = 0$, c'est-à-dire pour $\lambda = p$.

Si $h_{2r} (\lambda - p) < 0$, toutes ces solutions seront complexes. Si $h_{2r} (\lambda - p) > 0$, deux solutions - et seulement deux - seront réelles, dont une positive et une négative. Par exemple, quand $h_{2r} > 0$, nous pouvons choisir p en lui donnant des valeurs entières quelconques plus petites que λ , et plus grandes que λ si $h_{2r} < 0$.

En choisissant ainsi le nombre p , on obtient pour chaque p deux solutions génératrices :

$$\left\{ \xi^{(p)}(t+h), \quad \eta^{(p)}(t+h), \quad \xi_s^{(p)}(t+h) \right\}$$

En dehors de celles-ci, la solution triviale $\xi = \eta = \xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ de (1.4) peut être considérée comme solution périodique de période 2π .

II - LA SOLUTION PERIODIQUE $\left\{ x_s^{(0)} \right\}$.

Désignons par $\left\{ x_s^{(0)} \right\}$ ou $\left\{ x^{(0)}, y^{(0)}, x_s^{(0)} \right\}$ la solution périodique du système (1.1) ou (1.7), qui se réduit à la solution génératrice $x_1^0 = \dots = x_n^0$, pour $\mu = 0$.

Les équations aux variations du système générateur (1.2), pour la solution $x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0$ ont évidemment

la forme

$$(2.1) \quad \frac{du_s}{dt} = a_{s1} u_1 + \dots + a_{sn} u_n$$

Supposons d'abord que l'équation déterminante (1.3) n'a pas de racines de la forme $\pm pi$, p étant un entier réel. Dans ce cas, le système (2.1) n'aura pas de solutions périodiques de période 2π et par conséquent la solution génératrice considérée sera isolée. Alors, d'après le théorème de POINCARÉ (Voir Annexe A, par. 1), le système (1.1) aura une solution périodique, et une seule, analytique par rapport à μ , se réduisant à la solution génératrice, lorsque $\mu = 0$. Nous cherchons cette solution sous forme de séries :

$$(2.2) \quad x_s^{(0)}(t) = \mu x_{s1}(t) + \mu^2 x_{s2}(t) + \dots$$

satisfaisant formellement aux équations (1.1). Les coefficients périodiques x_{sK} seront définis par

$$\frac{dx_{sK}}{dt} = a_{s1} x_{1K} + \dots + a_{sn} x_{nK} + f_{sK}(t)$$

où f_{sK} sont des fonctions rationnelles et entières des quantités x_{sj} pour lesquelles $j < K$. Ces équations donnent la possibilité de déterminer successivement les coefficients x_{sK} sous forme de fonctions périodiques par rapport au temps dont les coefficients seront parfaitement déterminés.

Si l'équation déterminante (1.3) a des racines purement imaginaires de la forme $\pm pi$, p étant un entier réel, il y aura résonance. Considérons aussi comme cas de résonance les cas où l'équation déterminante a des racines différentes à une quantité d'ordre μ de $\pm pi$.

III - SOLUTIONS PERIODIQUES A LA RESONANCE.

Supposant que toutes les conditions du paragraphe I soient satisfaites, on peut ramener le système (1.1) à la forme:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -p y + X + \mu f(t, x, y, x_j, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= p x + Y + \mu F(t, x, y, x_j, \mu) \end{aligned}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} x_{\alpha} + X_s + \mu F_s(t, x, y, x_j, \mu) ; \quad (s=1, \dots, m)$$

Cherchons à satisfaire ce système par des séries de la forme suivante :

$$x = \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \dots ; y = \mu y^{(1)}(t) + \mu^2 y^{(2)}(t) + \dots$$

$$x_s = \mu x_s^{(1)}(t) + \mu^2 x_s^{(2)}(t) + \dots$$

à coefficients périodiques, qui se réduisent évidemment à la solution triviale $x = y = x_K = 0$, pour $\mu = 0$.

Pour déterminer les fonctions $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ et $x_s^{(1)}$, nous aurons un système d'équations de la forme :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= -p y^{(1)} + f(t, 0, \dots, 0) \\ \frac{dy^{(1)}}{dt} &= p x^{(1)} + F(t, 0, \dots, 0) \\ \frac{dx_s^{(1)}}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} x_{\alpha}^{(1)} + F_s(t, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Du fait que l'équation (1.5) n'a pas de racines $\pm Ki$ (K étant un entier réel), ce système admettra une solution périodique pour $x_s^{(1)}$.

Pour que les fonctions $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$ soient périodiques, il faut et il suffit que les deux quantités

$$(3.3) \quad \delta_1 = B_{1p} - A_{2p}, \quad \delta_2 = A_{1p} + B_{2p}$$

s'annulent. On a mis ici :

$$(3.4) \quad \begin{aligned} f(t, 0, 0, 0) &= A_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \cos nt + B_{1n} \sin nt) \\ F(t, 0, \dots, 0) &= B_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \cos nt + B_{2n} \sin nt) \end{aligned}$$

Nous supposerons qu'au moins une des quantités (3.3) est différente de zéro. Dans ce cas, on dira qu'il y a résonance principale. Dans le cas de la résonance principale, on aura la

théorème suivant de MALKIN [67] : Soit $2p$ la puissance minima de la quantité c , dans le développement de la période

$$T = \frac{2\pi}{p} (1 + h_2 c^2 + \dots)$$

de la solution périodique du système générateur

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -p\eta + X(\xi, \eta, \xi_j) \\ \frac{d\eta}{dt} &= p\xi + Y(\xi, \eta, \xi_j) \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} \xi_\alpha + X_s(\xi, \eta, \xi_j) \end{aligned}$$

satisfaisant aux conditions initiales : $\xi(0) = c$, $\eta(0) = 0$.

Alors, à la résonance principale, il existe une solution $\{x^{(rés)}, y^{(rés)}, x_s^{(rés)}\}$ des équations (3.1), et une seule, pour laquelle les fonctions $x^{(rés)}, y^{(rés)}, x_s^{(rés)}$ s'annulent pour $\mu = 0$, et ces fonctions se développent en séries suivant les puissances positives de la quantité $\mu = \frac{1}{2\ell+1}$ et elles convergent pour la valeur de μ , suffisamment petite.

Démonstration :

Comme on l'a déjà vu (par. 4, B), pour le système générateur (3.5), il existe une solution périodique contenant deux constantes arbitraires a et b , qui représentent les valeurs initiales des quantités ξ et η . Les quantités $\xi_s = W_s(\xi, \eta)$ sont des fonctions analytiques de ξ et η .

En introduisant dans les équations (3.1), au lieu des variables x_s , les variables $u_s = x_s - w_s(x, y)$, ($s = 1, \dots, m$), nous amènerons ces équations à la forme :

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -p y + X^*(x, y, u_j) + \mu f^*(t, x, y, u_j, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= p x + Y^*(x, y, u_j) + \mu F^*(t, x, y, u_j, \mu) \\ \frac{du_s}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} u_\alpha + X_s^*(x, y, u_j) + \mu F_s^*(t, x, y, u_j, \mu) \end{aligned}$$

dont X^* , Y^* , X_S^* , f^* , F^* , F_S^* sont analogues aux X , Y , X_S , f , F , F_S .

Les équations (3.5) prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= -p\eta + X^*(\xi, \eta, \xi_j) \\ (3.7) \quad \frac{d\eta}{dt} &= p\xi + Y^*(\xi, \eta, \xi_j) \\ \frac{d\xi_s}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} \xi_\alpha + X_S^*(\xi, \eta, \xi_j) \end{aligned}$$

La transformation considérée est d'ailleurs telle que le problème de la recherche de la solution périodique du système (3.1) est équivalente au même problème pour le système (3.6).

Dans ce cas, on a évidemment :

$$f^*(t, 0, \dots, 0) = f(t, 0, \dots, 0) \quad ; \quad F^*(t, 0, \dots, 0) = F(t, 0, \dots, 0)$$

alors, les quantités (3.3) ne changent pas et, par conséquent, pour le système (3.6), on aura aussi la résonance principale. La solution périodique du système (3.5) passe dans la solution périodique du système générateur (3.7). Pour la dernière, en vertu des formules de la transformation, les quantités ξ_s sont identiquement nulles. Ainsi, la solution des équations (3.7) satisfaisant aux conditions initiales

$$(3.8) \quad \xi(0) = a, \quad \eta(0) = b, \quad \xi_s(0) = 0$$

(a et b sont des constantes arbitraires), sera périodique ; la période (Voir (4.13), (4.15) B) de cette solution sera :

$$(3.9) \quad T = \frac{2\pi}{p} \left\{ 1 + H_2 \ell (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} + \dots, \text{ dont } H_2 \ell = h_2 \ell \neq 0 \right.$$

Comme le système (3.7) a une solution où tous les ξ_s sont nuls, on a aussi :

$$(3.10) \quad \left\{ X_S^*(x, y, \xi_j) \right\}_{\xi_j=0} = 0$$

on désignera par

$$(3.11) \quad x(t, a, b, \beta_j, \mu), \quad y(t, a, b, \beta_j, \mu), \quad u_s(t, a, b, \beta_j, \mu)$$

la solution des équations (3.6), satisfaisant aux conditions initiales

$$x(0, a, b, \beta_j, \mu) = a, \quad y(0, a, b, \beta_j, \mu) = b, \quad x_s(0, a, b, \beta_j, \mu) = \beta_s$$

On a identiquement

$$(3.12) \quad \left\{ x(pT, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0} \equiv a \quad \left\{ y(pT, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0} \equiv b$$

Ensuite, en vertu de (3.10)

$$(3.13) \quad \left\{ u_s(t, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0} = 0$$

Pour que la solution considérée (3.11) soit périodique de période 2π , il faut et il suffit que :

$$(3.14) \quad \begin{aligned} [x] &= x(2\pi, a, b, \beta_j, \mu) - a = 0 ; \\ [y] &= y(2\pi, a, b, \beta_j, \mu) - b = 0 ; \\ [u_s] &= u_s(2\pi, a, b, \beta_j, \mu) - \beta_s = 0 \end{aligned}$$

$$(où, en général, [f_s(t)] = f_s(2\pi) - f_s(0)) .$$

On étudiera en détail les équations (3.14). En se bornant seulement aux termes linéaires, on aura :

$$(3.15) \quad \begin{aligned} x(t, a, b, \beta_j, \mu) &= A_1 a + B_1 b + C_1 \mu + \dots \\ y(t, a, b, \beta_j, \mu) &= A_2 a + B_2 b + C_2 \mu + \dots \\ u_s(t, a, b, \beta_j, \mu) &= A_{s1} \beta_1 + \dots + A_{sm} \beta_m + D_s \mu + \dots \end{aligned}$$

(les autres termes, comme on voit facilement dans (3.6), s'annulent identiquement).

La déterminant fonctionnel (jacobien) des m dernières équations (3.14) par rapport aux quantités $\beta_1, \dots, \beta_m$ pour $a = b = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$, aura la valeur :

$$(3.16) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11}(2\pi)-1 & A_{12}(2\pi) & \dots & A_{1m}(2\pi) \\ A_{21}(2\pi) & A_{22}(2\pi)-1 & \dots & A_{2m}(2\pi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}(2\pi) & A_{m2}(2\pi) & \dots & A_{mm}(2\pi)-1 \end{vmatrix}$$

Mais les quantités A_{sj} satisfont aux équations

$$(3.17) \quad \frac{dA_{sj}}{dt} = b_{s1} A_{1j} + \dots + b_{sm} A_{mj}$$

et aux conditions initiales : $A_{ss}(0) = 1$, $A_{sj}(0) = 0$ ($s \neq j$).

Il en résulte que $\Delta = D(1)$,

où $D(\rho)$ est le déterminant caractéristique du système (3.17) considéré comme un cas particulier de systèmes aux coefficients périodiques de période 2π .

Les exposants caractéristiques du système (3.17) sont égaux aux racines de l'équation déterminante (1.5). Parmi ces dernières, on ne trouve pas de quantités égales à $\pm Ki$, l'équation caractéristique $D(\rho) = 0$ n'a donc pas de racines égales à 1. Par conséquent, $\Delta \neq 0$. C'est pourquoi on peut résoudre les m dernières équations de (3.14) par rapport aux quantités β_s et on trouve :

$$(3.18) \quad \beta_s = \beta_s^*(a, b, \mu) \quad (s = 1, \dots, m)$$

où β_s^* sont des fonctions analytiques s'annulant pour $a = b = \mu = 0$. On remarque que les fonctions (3.18) s'annulent aussi pour $\mu = 0$ et a et b différents de zéro, parce que les fonctions $u_s(t, a, b, \beta_j, \mu)$, en vertu de (3.13) s'annulent nécessairement pour $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = \mu = 0$, quelles que soient les valeurs de t , a et b .

Ainsi donc :

$$(3.19) \quad \beta_j^*(a, b, 0) = 0$$

En introduisant dans les deux premières équations (3.14), au lieu des β_j leurs valeurs (3.18), on aura :

$$x(2\pi, a, b, \beta_j(a, b, \mu), \mu) - a = 0 ;$$

$$y(2\pi, a, b, \beta_j(a, b, \mu), \mu) - b = 0 ;$$

d'où on trouve, en vertu de (3.15) :

$$x(2\pi, a, b, \beta_j(a, b, 0), 0) - a + \mu \left\{ [c_1] + \bar{\Phi}_1(a, b, \mu) \right\} = 0$$

$$y(2\pi, a, b, \beta_j(a, b, 0), 0) - b + \mu \left\{ [c_2] + \bar{\Phi}_2(a, b, \mu) \right\} = 0$$

dont $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_2$ sont des fonctions analytiques s'annulant pour $a = b = \mu = 0$.

En vertu de (3.19), on obtient :

$$\left\{ x(2\pi, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0} - a + \mu \left\{ [c_1] + \bar{\Phi}_1(a, b, \mu) \right\} = 0$$

$$\left\{ y(2\pi, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0} - b + \mu \left\{ [c_2] + \bar{\Phi}_2(a, b, \mu) \right\} = 0$$

En remplaçant dans ces équations 2π par sa valeur tirée de (3.9) :

$$2\pi = pT + h, \quad h = -2\pi H_2 \rho (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

et en développant en série suivant les puissances de h , on aura :

$$\left\{ x(pT, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0} + h \left\{ \frac{dx(t, a, b, \beta_j, 0)}{dt} \right\}_{\beta_j=0, t=pT} + \dots - a + \mu \left\{ [c_1] + \bar{\Phi}_1 \right\} = 0$$

$$\left\{ y(pT, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0} + h \left\{ \frac{dy(t, a, b, \beta_j, 0)}{dt} \right\}_{\beta_j=0, t=pT} + \dots - b + \mu \left\{ [c_2] + \bar{\Phi}_2 \right\} = 0$$

En considérant (3.12), la périodicité des fonctions

$$\left\{ x(t, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0}, \quad \left\{ y(t, a, b, \beta_j, 0) \right\}_{\beta_j=0}$$

et aussi du fait que ces fonctions satisfont aux équations (3.5), on trouve à la fin :

$$(3.20) \quad \begin{aligned} 2\pi p H_{2\ell}(a^2+b^2)^\ell b + \dots + \mu \left\{ [c_1] + \Phi_1(a, b, \mu) \right\} &= 0 \\ - 2\pi p H_{2\ell}(a^2+b^2)^\ell a + \dots + \mu \left\{ [c_2] + \Phi_2(a, b, \mu) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

où les termes non écrits dépendent seulement de a et b et ils sont de degré plus grands que $2\ell + 1$ par rapport à ces quantités.

Les quantités c_1 et c_2 satisfont aux équations

$$\frac{dc_1}{dt} = -p c_2 + f(t, 0, \dots, 0) \quad ; \quad \frac{dc_2}{dt} = p c_1 + F(t, 0, \dots, 0)$$

et aux conditions initiales $c_1(0) = c_2(0) = 0$ qui, en vertu de (3.4), donnent :

$$c_1 = \frac{1}{2} (B_{1p} - A_{2p})t \sin pt + \frac{1}{2} (A_{1p} + B_{2p})t \cos pt + c_1^*(t)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (A_{1p} + B_{2p})t \sin pt - \frac{1}{2} (B_{1p} - A_{2p})t \cos pt + c_2^*(t)$$

où c_1^* et c_2^* sont certaines fonctions périodiques de période 2π , par rapport à t .

Dici, sur la base de (3.3), on obtient :

$$[c_1] = \int_0^{2\pi} \pi \quad ; \quad [c_2] = - \int_0^{2\pi} \pi$$

et par la suite au moins l'une des quantités $[c_1]$ et $[c_2]$ diffère de zéro.

Cela étant établi, on passe à la solution des équations (3.20). Il faut trouver les racines a et b de ces équations, qui s'annulent pour $\mu = 0$. Dans ce but, on pose

$$\sqrt{\mu} = \frac{1}{2\ell+1}, \quad a = \sqrt{2\ell+1} \alpha_1, \quad b = \sqrt{2\ell+1} \alpha_2$$

Puis, en simplifiant par $\sqrt{2\ell+1}$, on obtient :

$$2\pi p H_{2\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^\ell \alpha_2 + [c_1] + \sqrt{\nu} \bar{\Phi}_1^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0 \quad (3.21)$$

$$-2\pi p H_{2\ell} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^\ell \alpha_1 + [c_2] + \sqrt{\nu} \bar{\Phi}_2^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0$$

Ces équations, pour $\nu = 0$, ont une solution réelle unique

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{[c_2]}{2^{\ell+1} \sqrt{2\pi p H_{2\ell} \{ [c_1]^2 + [c_2]^2 \}^\ell}} \quad (3.22)$$

$$\alpha_2^{(0)} = \frac{-[c_1]}{2^{\ell+1} \sqrt{2\pi H_{2\ell} \{ [c_1]^2 + [c_2]^2 \}^\ell}}$$

Etant donné que, dans ce cas, le déterminant fonctionnel correspondant :

$$4(1+2\ell)\pi^2 p^2 H_{2\ell}^2 (\alpha_1^{(0)2} + \alpha_2^{(0)2})^{2\ell}$$

diffère du zéro, alors les équations (3.21) admettent dans le voisinage de $\nu = 0$ une seule solution réelle de la forme :

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(0)} + \sqrt{\nu} \alpha_1^{(1)} + \dots, \quad \alpha_2 = \alpha_2^{(0)} + \sqrt{\nu} \alpha_2^{(1)} + \dots$$

où les parties droites sont des fonctions analytiques de dans le voisinage de $\nu = 0$.

Par conséquent, les équations (3.20) ont la solution réelle :

$$(3.23) \quad a = \alpha_1^{(0)}\sqrt{\nu} + \alpha_1^{(1)}\nu + \dots, \quad b = \alpha_2^{(0)}\sqrt{\nu} + \alpha_2^{(1)}\nu + \dots$$

Il n'est pas difficile de voir que c'est la seule solution réelle des équations (3.20), pour laquelle a et b s'annulent quand $\mu = 0$.

En effet, pour chacune de ces solutions, comme on le sait déjà par la théorie des équations de la forme (3.20), les quantités a et b sont des fonctions analytiques de $\mu^{\frac{1}{4n}}$ m étant un entier. On vérifie facilement que les équations (3.20) peuvent être satisfaites par des séries développées sui-

vant les puissances de $\mu^{\frac{1}{m}}$, pourvu que $m = 2^l + 1$. En introduisant dans les équations (3.18), au lieu de a et b leurs valeurs obtenues, on obtient β_s , qui sont aussi des fonctions analytiques de μ . En remplaçant a , b et β_s dans (3.11), on obtient la solution périodique des équations (3.6), qui satisfont à toutes les conditions du théorème. Le théorème est ainsi démontré.

IV - METHODES PRATIQUES DE CALCUL A LA RESONANCE.

Pour le calcul pratique de la solution périodique du système (3.1), on cherchera à le satisfaire par des séries à coefficients périodiques de la forme :

$$\begin{aligned}
 x^{(\text{rés})} &= x^{(1)} \mu^{\frac{1}{2^l+1}} + x^{(2)} \mu^{\frac{2}{2^l+1}} + \dots \\
 (4.1) \quad y^{(\text{rés})} &= y^{(1)} \mu^{\frac{1}{2^l+1}} + y^{(2)} \mu^{\frac{2}{2^l+1}} + \dots \\
 x_s^{(\text{rés})} &= x_s^{(1)} \mu^{\frac{1}{2^l+1}} + x_s^{(2)} \mu^{\frac{2}{2^l+1}} + \dots \quad (s=1, \dots, m)
 \end{aligned}$$

En faisant dans les équations (3.1) la substitution (4.1) et en égalant, ensuite les coefficients pour les mêmes puissances de $\mu^{\frac{1}{2^l+1}}$, nous obtenons les systèmes suivants d'équations :

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad \frac{dx^{(k)}}{dt} &= -p y^{(k)} + f^{(k)} \quad ; \quad \frac{dy^{(k)}}{dt} = p x^{(k)} + F^{(k)} \\
 \frac{dx_s^{(k)}}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^m b_{s\alpha} x_{\alpha}^{(k)} + F_s^{(k)} \quad ; \quad (s = 1, \dots, m) \\
 &\quad (k = 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

Les $f^{(K)}$, $F^{(K)}$, $F_s^{(K)}$ sont ici certaines fonctions rationnelles et entières des quantités $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$, pour lesquelles $i \leq K$, avec des coefficients périodiques.

Supposons que l'on ait déjà calculé les fonctions $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $x_s^{(i)}$, pour lesquelles $i \leq K$, et que toutes soient périodiques. Alors, les équations (4.2) déterminent complètement $x_s^{(K)}$. Les deux premières équations (4.2) donne-

ront les $x^{(K)}$ et $y^{(K)}$ sous la forme :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} x^{(K)} &= M_K \cos pt - N_K \sin pt + x_K^*(t) \\ y^{(K)} &= M_K \sin pt + N_K \cos pt + y_K^*(t) \end{aligned}$$

où x_K^* , y_K^* , est une certaine solution particulière des équations qui déterminent $x^{(K)}$ et $y^{(K)}$; M_K et N_K sont des constantes arbitraires. Dans ce cas, pour que les équations pour $x^{(K)}$ et $y^{(K)}$ admettent vraiment une solution périodique, il faut et il suffit que les conditions

$$(4.4) \quad a_{1p}^{(K)} + b_{2p}^{(K)} = 0 \quad ; \quad b_{1p}^{(K)} - a_{2p}^{(K)} = 0$$

soient satisfaites, où par $a_{1p}^{(K)}$ et $b_{1p}^{(K)}$ on a désigné les coefficients de $\cos pt$ et $\sin pt$ dans le développement de Fourier de la fonction f_K et par $a_{2p}^{(K)}$ et $b_{2p}^{(K)}$, les mêmes coefficients de la fonction F_K .

Les équations (4.4) déterminent les constantes arbitraires M_j et N_j des approximations successives.

Les équations (4.4) ont les propriétés suivantes :

- 1) Elles sont identiquement satisfaites pour $K < 2^l + 1$.
- 2) Pour $K = 2^l + 1$, ces équations contiennent seulement les constantes M_1 et N_1 , et elles seront non linéaires et posséderont une solution unique.

3) Pour $K = 2^l + j$ ($j > 1$), ces équations seront linéaires par rapport à M_j et N_j .

On voit facilement que M_1 et N_1 sont égaux à $\alpha_1^{(0)}$ et $\alpha_2^{(0)}$ et, par conséquent, peuvent être calculés d'après les formules (3.22).

V - SOLUTIONS PERIODIQUES DE LA FORME $\{x_s^{(p)}\}$.

Désignons par $\{x_s^{(p)}\}$ (ou $\{x^{(p)}, y^{(p)}, x_s^{(p)}\}$), la solution périodique du système (1.1) - ou (1.7) -, qui se ré-

duit à la solution génératrice $\left\{ \xi_s^{(p)}(t+h) \right\}$ (ou $\left\{ \xi^{(p)}(t+h), \eta^{(p)}(t+h), \xi_s^{(p)}(t+h) \right\}$), pour $\mu = 0$.

Etant donné que la solution génératrice dépend d'une constante arbitraire h , alors le problème considéré est un cas particulier du problème général étudié en détail dans la section A (par. 2 - 4).

Conformément aux résultats obtenus, pour qu'à la solution génératrice $\left\{ \xi_s^{(p)}(t+h) \right\}$ puisse correspondre une solution périodique du système (1.1), il faut que la constante h soit une racine de l'équation :

$$(5.1) \quad P(h) = \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(t, \xi_1^{(p)}(t+h), \dots, \xi_n^{(p)}(t+h), 0) \Psi_{\alpha} dt = 0$$

$\Psi_s(t)$ est ici la solution périodique du système adjoint au système des équations aux variations du système générateur :

$$(5.2) \quad \frac{d\xi_s}{dt} = a_{s1} \xi_1 + \dots + a_{sn} \xi_n + X_s^*(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

pour la solution $\left\{ \xi_s^{(p)}(t+h) \right\}$.

Du fait que le système (5.2) admet l'intégrale :

$$(5.3) \quad H(\xi_1, \dots, \xi_n) = \text{const.}$$

alors on peut utiliser les résultats de la section A (par. 6) et par suite l'équation (5.1) s'écrit :

$$(5.4) \quad P(h) = \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha}(t, \xi_1^{(p)}(t+h), \dots, \xi_n^{(p)}(t+h), 0) \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi_{\alpha}} dt = 0$$

où les dérivées partielles de la fonction H sont calculées pour la solution génératrice.

On montre aussi qu'à chacune racine simple de l'équation (5.4) correspond une solution périodique et une seule (du système (1.1)) et que cette solution sera analytique par rapport

à μ : Néanmoins, il faut vérifier que les équations aux variations du système générateur admettent seulement une seule solution périodique.

Les équations aux variations ont la forme :

$$(5.5) \quad \frac{du_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n \left(a_{s\alpha} + \frac{\partial X_s^*}{\partial \xi_{\alpha}} \right) u_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n p_{s\alpha} u_{\alpha}$$

où dans les dérivées des X_s , les quantités ξ_j doivent être remplacées par leurs valeurs données par la solution génératrice, c'est-à-dire par les fonctions $\xi_s^{(p)}(t+h)$. Pour les dernière, on peut écrire :

$$(5.6) \quad \xi_s^{(p)}(t+h) = c_p \xi_{s1}(t+h) + c_p^2 \xi_{s2}(t+h) + \dots,$$

ξ_{sj} étant des fonctions périodiques de période $\frac{2\pi}{p}$ par rapport à t .

Attendu que le système générateur est autonome, il admet une famille de solutions périodiques qui dépendent encore - en dehors du paramètre h - d'un paramètre essentiel c et la solution génératrice appartient à cette famille. En vertu des résultats généraux de MALKIN [67, p.415], on peut affirmer que le système (5.5) admet une solution particulière périodique, que nous désignons par $\varphi_s(t)$, et une autre solution particulière qui ne sera pas périodique car la période T du système générateur dépend de c . Cette dernière solution aura la forme $t \varphi_s + \varphi_s^*$, où φ_s^* sont aussi des fonctions périodiques. Il s'ensuit que l'équation caractéristique du système (5.5) a deux racines égales à 1.

Nous allons démontrer que les autres racines de l'équation caractéristique différent de 1.

En effet, pour $c_p = 0$, comme on le voit par (5.6), le système (5.5) passe dans le système à coefficients constants:

$$(5.7) \quad \frac{du_s}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n a_{s\alpha} u_{\alpha}$$

L'équation déterminante de ce système, dans les hypothèses faites, a une paire de racines purement imaginaires $\pm \lambda i$. Mais étant donné que $c_p = 0$, alors $\lambda = p$. En dehors de cela, en accord avec nos hypothèses, l'équation déter-

minante du système (5.7) n'a pas de racines de la forme $\pm k \lambda_i = \pm k p_i$ (k étant un entier réel).

Supposons que l'équation déterminante n'a pas de racines de la forme $\pm k i$ différentes des racines $\pm p_i$. Dans cette hypothèse, plus forte que la précédente, le système (5.5), pour $c_p = 0$, aura seulement deux exposants caractéristiques de la forme $\pm p_i$, c'est-à-dire l'équation caractéristique de ce système aura seulement deux racines égales à 1. La même chose sera vraie alors pour $c_p \neq 0$, mais suffisamment petit, parce que les racines de l'équation caractéristique du système (5.5) seront des fonctions continues de c_p . On remarque également que, même si le système (5.5) avait eu, pour $c_p = 0$, des exposants caractéristiques de la forme $\pm k i$, différents de $\pm p_i$, alors, seulement dans des cas exceptionnels, ces exposants auraient conservé leur forme pour $c_p \neq 0$.

Donc, on peut considérer que l'équation caractéristique du système (5.5) a seulement deux racines égales à 1, auxquelles correspond seulement une seule solution périodique $\phi_s(t)$.

Supposons que h soit une racine simple de l'équation (5.4). Comme on l'a démontré, la solution périodique $\{x_s^{(p)}\}$ existera alors vraiment, et elle sera analytique par rapport à μ . On peut donc écrire :

$$(5.8) \quad x_s^{(p)} = \xi_s^{(p)}(t+h) + \mu x_{s1}(t) + \dots$$

Pour les fonctions x_{sj} , on obtient des équations de la forme :

$$(5.9) \quad \frac{dx_{sj}}{dt} = p_{s1} x_{1j} + \dots + p_{sn} x_{nj} + F_{sj}$$

où F_{sj} seront des fonctions périodiques de t , connues, si toutes les fonctions $x_{s1}, \dots, x_{s,j-1}$ sont calculées et sont périodiques.

Si la solution périodique de (5.9) existe, elle aura la forme :

$$x_{sj} = M_j \phi_s(t) + x_{sj}^*(t)$$

où x_{sj}^* est une solution périodique particulière du système (5.9) et M_j est une constante arbitraire. Cette constante est définie par les conditions d'existence de la solution périodique des équations pour $x_{s,j+1}$.

Comme on le sait (Section A, par. 3), l'équation qui détermine M_j a la forme :

$$\frac{dP(h)}{dh} M_j = L_j$$

où L_j est une constante connue.

Etant donné que le développement de la fonction H commence par des termes de degré non inférieur au second, alors comme on le voit par (5.6) et (5.4), la fonction $\frac{dP}{dh}$ s'annule pour $c_p = 0$. A cause de cela, les quantités M_j et en même temps les fonctions x_{sj} contiendront la quantité c_p au dénominateur. Par conséquent, pour μ fixé, si la quantité c_p est très petite, c'est-à-dire si λ diffère peu du nombre entier p , la solution $x_s^{(p)}$ cesse d'exister. Dans ce cas, nous avons la résonance et si les conditions de la résonance principale sont satisfaites, alors on peut trouver la solution périodique du système (1.1) par la méthode du paragraphe précédent.

Pour le calcul effectif des coefficients x_{sj} , il faut connaître la solution générale des équations aux variations (5.5). On pourra toujours la connaître si le système est du deuxième ordre, étant donné que nous avons deux solutions particulières φ_s et $t\varphi_s + \varphi_s^*$. Cela aura lieu, en particulier, pour le système :

$$(5.10) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x + F(x) = \mu f(t, x, \frac{dx}{dt})$$

où $F(x)$ est une fonction analytique dont le développement commence par des termes de degré non inférieur au second. Le système (5.10) est un cas particulier des systèmes considérés dans la section A (par. 4) et, par conséquent, on peut calculer la solution $\{x^{(p)}\}$ suivant les formules générales établies là.

VI - CONDITIONS DE STABILITE.

La stabilité des solutions périodiques du système (1.1) peut être étudiée par les méthodes générales exposées dans le chapitre III du [67]. Pourtant, dans ce cas, de sérieuses difficultés apparaissent dans l'étude de la stabilité à la résonance car, dans ce cas, il faut considérer $2l+1$ approximations. Ceci étant expliqué, on établira les conditions de stabilité de la solution à la résonance d'une manière différente, en se bornant aux systèmes du deuxième ordre.

Considérons le système :

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -py + X(x,y) + \mu f(t,x,y, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= px + Y(x,y) + \mu F(t,x,y, \mu) \end{aligned}$$

qui se réduit aux systèmes de LIAPOUNOFF pour $\mu = 0$. Formons pour lui le système aux variations :

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} \right) u + \left(-p + \frac{\partial X}{\partial y} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} \right) v \\ \frac{dv}{dt} &= \left(p + \frac{\partial Y}{\partial x} + \mu \frac{\partial F}{\partial x} \right) u + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \mu \frac{\partial F}{\partial y} \right) v \end{aligned}$$

où les dérivées sont calculées pour la solution à la résonance $\{x^{(rés)}, y^{(rés)}\}$.

Formons l'équation caractéristique de ce système. Dans ce but, désignons par $x(t,a,b,\mu)$, $y(t,a,b,\mu)$ la solution du système (6.1) satisfaisant aux conditions initiales :

$$(6.3) \quad x(0,a,b,\mu) = a \quad ; \quad y(0,a,b,\mu) = b$$

Alors le système aux variations (6.2) aura le système fondamental des solutions :

$$(6.4) \quad \begin{aligned} u_1(t) &= \frac{\partial x(t,a,b,\mu)}{\partial a} & v_1(t) &= \frac{\partial y(t,a,b,\mu)}{\partial a} \\ u_2(t) &= \frac{\partial x(t,a,b,\mu)}{\partial b} & v_2(t) &= \frac{\partial y(t,a,b,\mu)}{\partial b} \end{aligned}$$

où après la dérivation il faut remplacer, dans la solution $\{x^{(rés)}, y^{(rés)}\}$, les quantités a et b par leurs valeurs $a(\mu)$ et $b(\mu)$. En nous reportant aux formules (6.3) on voit que $u_1(t)$ et $v_1(t)$ satisfont aux conditions initiales:

$$u_1(0) = 1 \quad , \quad u_2(0) = v_1(0) = 0 \quad , \quad v_2(0) = 1$$

et pour cela, l'équation caractéristique du système (6.2) a la forme :

$$(6.5) \quad \begin{vmatrix} u_1(2\pi) - \rho & v_1(2\pi) \\ u_2(2\pi) & v_2(2\pi) - \rho \end{vmatrix} = 0$$

Mais

$$(6.6) \quad \begin{aligned} x(2\pi, a, b, \mu) &= \Psi_1(a, b, \mu) + a \\ y(2\pi, a, b, \mu) &= \Psi_2(a, b, \mu) + b \end{aligned}$$

où Ψ_1 et Ψ_2 sont les parties gauches des deux premières équations (3.14) pour le cas considéré actuellement. Comme on l'a démontré, Ψ_1 et Ψ_2 ont la forme (3.20) et, par conséquent, on peut écrire :

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \Psi_1 &= 2\pi p H_2 \ell (a^2 + b^2)^\ell b + \dots + \mu \{ [c_1] + \Phi_1(a, b, \mu) \} \\ \Psi_2 &= -2\pi p H_2 \ell (a^2 + b^2)^\ell a + \dots + \mu \{ [c_2] + \Phi_2(a, b, \mu) \} \end{aligned}$$

De (6.4) et (6.7), nous concluons que l'équation caractéristique sera de la forme :

$$(6.8) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial a} + 1 - \rho & \frac{\partial \Psi_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial a} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial b} + 1 - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 + 2A\rho + B = 0$$

où les quantités a et b doivent être remplacées par leurs valeurs correspondantes à la solution $\{x^{(rés)}, y^{(rés)}\}$, c'est-à-dire par les séries (3.23).

Dans l'équation caractéristique on peut exprimer, explicitement, le coefficient B par les coefficients du système (6.2) - Voir [61, p.394], [67, p.167] - :

$$(6.9) \quad B = \exp \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) \right] dt \right\}$$

Pour la stabilité de la solution étudiée, il faut satisfaire à la condition :

FORMULES TRIGONOMETRIQUES SOUVENT UTILISEES

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2t)$$

$$\sin^3 t = \frac{1}{4} (3 \sin t - \sin 3t)$$

$$\sin^4 t = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2t + \cos 4t)$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t)$$

$$\cos^3 t = \frac{1}{4} (3 \cos t + \cos 3t)$$

$$\cos^4 t = \frac{1}{8} (3 + 4 \cos 2t + \cos 4t)$$

$$\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$\sin^2 t \cos t = \frac{1}{4} (\cos t - \cos 3t)$$

$$\sin^3 t \cos t = \frac{1}{8} (2 \sin 2t - \sin 4t)$$

$$\cos^2 t \sin t = \frac{1}{4} (\sin t + \sin 3t)$$

$$\cos^3 t \sin t = \frac{1}{8} (2 \sin 2t + \sin 4t)$$

$$\cos^2 t \sin^2 t = \frac{1}{8} (1 - \cos 4t)$$

$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin b \cos a = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

- B I B L I O G R A F I E -

- (1) ABRAMSON H.N., Response curves for a system with softening restoring force, J.Appl.Mech., 1955, 22, №3, pp.434-435
- (2) ABRAMSON H.N., Resonance amplitudes, Prod.Engng, 1954, 25, №1, pp.179-182.
- (3) ANDRONOV A. et VITT A., K matematičeskoj teorij zakhvatyvanija., Žurn.prikl.Fiziki., T.VIII, VYP.4, 1930.
- (4) APFLETON B.V., On the Anomalous Behavior of a Galvanometer. Phil.Mag., vol.47, 1924.
- (5) ARTEM'EV N.A., Metod opredelenija kharakteristiceskich pokazatelej i prilozhenija ego k dvum zadacam nebesnoj meehaniki, Izv. ANSSSR, serija matem., t.8, №2, 1944.
- (6) ATKINSON C.P., Superharmonic oscillations as solutions to Duffing's equation as solved by an electronic differential analyzer. J.Appl. Mech., 1957, 24, №4, pp.520-525.
- (6)a ATKINSON G.P., BOURNE C.P., The solution of Duffing's equation for the softening spring system using the Ritz-Galerkin method with a three term approximation., Proc.3rd.U.S.Nat.Congr. Appl.Mech.Providence, Rhode Island, 1958, New-York, N.Y., 1958, 71-77 (voir aussi pp.133-140)
- (7) BAKER J.G., Forced Vibrations with Nonlinear Spring constants., Trans.Am.Soc.Mech.Eng., Vol.54, 1932.
- (8) BELLIN A.I., Non autonomous systems., Advances in Applied Mechanics, N.Y., Academic Press, Inc. 1953, pp.295-320.
- (9) BIRJUK G.I., Ob odnoj teoreme suscestvovanija pocti-periodiceskich resenij nekotorykh sistem nelinejnykh differencial'nykh uravnenij, DAN.SSSR, t.XCVI, vyp.1, 1954.
- (10) BOGOLJUBOV N.N., O nekotorykh statisticeskich metodakh v matematičeskoj fizike, Izd. A.N. USSR, 1945.
- (11) BOGOLJUBOV N.N. i Mitropol'skij ju.A., Asimtotičeskie metody v teorij nelinejnykh kolebanij. (Méthodes asymptotique de la théorie des oscillations non linéaires. Nouvelle édition, revue et augmentée). Gosudarstvennoe Izdatel'stvo fizico-matematiceskoj literatury, 1958.

- (12) BRAUNBEK W., Enzwungene Schwingungen eines einfachen nichtlinearen systems., Z.Phys., 1957, 147, N°3, pp.297-306.
- (13) BULGAKOV B.V., Periodic Processes in Free Pseudolinear oscillatory systems., Journal of the Franklin Institute, vol.235, 1943.
- (14) BULGAKOV B.V., Kolebanija (Oscillations) M., Gostekhnizdat, 1954.
- (15) CARTWRIGHT M.L., Forced oscillations in Nonlinear systems, Contributions to the Theory of Nonlinear oscillations, edited by S.Lefschetz, vol.I, Princeton University Press, 1950.
- (16) CARTWRIGHT M.L. and Littlewood J.E., Annals of Maths., 48, 1947, pp.472-494.
- (17) CESARI L., Existence theorems for periodic solutions of Nonlinear Lipschitzian differential systems and fixed point theorems., Study 45, Contributions to the Theory of Nonlinear oscillations, vol.V, edited by L.Cesari, J.La Salle and S.Lefschetz, Princeton, New-Jersey, Princeton University Press, 1960.
- (18) CESARI L., Asymtotic behavior and Stability problems in ordinary differential equation., Engebn.Math., 1959, N°116.
- (19) CAUGHEY T.K., The existence and Stability of ultraharmonics and subharmonics in forced nonlinear oscillations., J.Appl.Mech., 1954, 21 n°4, pp.327-335.
- (20) CODDINGTON E.A. and LEVINSON N., Perturbations of linear systems with constant coefficients possessing periodic solutions., Study 29, Contrib. to the Theory of Nonlinear oscill., ed. by S.Lefschetz, Princeton; Princeton University Press, 1952, pp.19-35.
- (21) COLOMBO G., Sulle oscillazioni non-lineari di combinazione, Rend.Seminar;, mat.Univ.Padova, Parte 1, 1957, 27, 162-175.
- (22) COLLATZ L., Determination numérique de solutions périodiques dans le cas d'oscillations non linéaires; Publ. Scient. et techn. Ministère air, 1953, N°231, pp.195-206.

- (23) COVERT E., A particular solution of a nonlinear differential equation which occurs in the dynamics of conservative systems and its application to undamped airplane motion., J.Aeronaut.Sci., 1955, 22, N°2 pp.134-135.
- (24) CROMIN J., Poincaré's perturbation method and Topological degree, Study 45, Contr.to the Th. of Nonlin.oscill. vol.V, ed.by L.Cesari, J. La Salle and S.Lefschetz, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1960.
- (25) CUNNINGHAM W.J., Even-order subharmonic oscillations., J.Appl. Phys., 1956, 27, N°11, pp.1374-1375.
- (26) DILIBERTO S.P., An application of periodic surfaces (solution of a small divisor problem), Study 36, Contr.to the th.of Nonlin.oscill., Vol.III, ed.by s.Lefschetz, Princeton, Princ.Univ.Press, 1956, pp.257-259.
- (27) DILIBERTO S.P. and HUFFORD G., Perturbation theorems for Non-linear ordinary differential equations, Study 36, Contr. to the theory of Nonlin. Oscill.vol.III, ed.by s.Lefschetz, Princeton, Princ.Univ.Press, 1956.
- (28) DROZDOV Ju.M, Forced Oscillations of a Nonlinear system with one Degree of Freedom near to conservative (Examples), Prikl.Mat.i Meh., XIX, 1955, pp.33-40 (Russian)
- (29) DUFFING G., Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz F. Viewegu. sohn, Braunschweig, 1918.
- (30) ERGIN E.J., Transient response of a nonlinear system by a bilinear approximation method., Paper Amer.Soc. Mech.Engrs, 1956, N°APM-37.
- (31) FORBAT N., Untersuchung eines mechanischen Schwingung und Beschleunigungsmessers unter besonderer Berücksichtigung der Nichtlinearität., Monatsber.Dtsch.Akad.Wiss. Berlin, 1960, 2, N°9 pp.517-526.
- (32) FRIEDRICHS K.O., Fundamentals of Poincaré's theory, Proceedings of the Symposium on nonlinear circuit analysis, New-York 1953, pp.56-67.
- (33) FRIEDRICHS K.O. and STOCKER J.J., Forced Vibrations of systems with Nonlinear Restoring Force;, Quart.Appl. Math., Vol.I, 1943.
- (34) FRIDRICHS K.O., LE CORBILLE Ph., Levinson N.and Stoker J.J. Nonlinear Mechanics, Brown Univ. 1942-43, A set of mimeographed lecture notes.

- (35) FUNATO M. and MAEKAWA T., On the existence of subharmonics for Duffing's equation, *Mathematica Japonicae*, vol.5, N°2, 1959, pp.27-32.
- (36) HAACKE W., Über die nichtlineare Mechanik, *Phys.Blätter*, 1953, 9, N°9 pp.398-405.
- (37) HARVEY T.J., Natural forcing functions in nonlinear systems., *J.Appl. Mech.*, 1952, 25, N°3, pp.352-356.
- (38) HAYASHI C., Subharmonic oscillation in nonlinear systems. *J.Appl. Phys. N.Y.* 1953, 24, N°5 pp.521-523 b)voir aussi pp.344-48.
- (39) HAYASHI C., Vynuzdenye kolebanija v nelinejnykh sistemakh (Oscillations forcées dans les systèmes non linéaires) *Perev.s.angl.M.*, Izd.vo in lit., 1957.
- (40) HELFENSTEIN E., Ueber eine spezielle Lamesche Differentialgleichung, mit Anwendung auf eine approximative Resonanz formel der Duffingschen Schwingungsgleichung, *Bidgenössischen Technischen Hochschule in Zurich*, Promotion sorbeit., N°1985, 1950.
- (41) HSU C.S., On the application of elliptic functions in non-linear forced oscillations, *Quart.Appl.Math.*, 1959, 17, n°4, pp.393-407.
On simple subharmonics, *Quart., appl.Math.*, 1959, N°3, pp.102-105.
- (42) KHUAN VEN'-KHU, Ob adnoj uprosennoj forme metoda malogo parametra dlja resenija nelinejnykh differencial'nykh uravnenij kolebanü, khnerbin'gun-e dasjue sju-bao, *Tr. Kharbinsk. politekhn.in-ta*, 1957, N°2, pp.103-113 (Chinoi)
- (43) JAMAMOTO, Kriterij ustojcivosti vynuzdennykh kolebanij nelinejnykh sistem, *Nihon kikaigakkaj rombunshu*, *Trans.Japan Soc.Mech.Engrs*, 1954, 20, N°95, pp.501-505.
- (44) JOHN F., On simple Harmonic Vibrations of a system with Non-Linear characteristics. From : *Studies in Non-Linear Vibration Theory*, *Inst.for Math. and Mech.* New York Univ., 1946.
- (45) JOHN F., On Harmonic Vibrations Out of Phase with the Exciting Force, *Comm.on. App. Math.*, vol.1, 1943.

- (46) KRYLOV N.M. i Bogoljubov N.N., Méthodes approchées de la Mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant (Monographie en français), Kiev, 1935.
- (47) KRYLOV N.M. i BOGOLJUBOV N.N., Vvedenie v nelinejnuju Mekhaniku, Izd. ANUSSR, 1937, (Introduction to Non-linear Mechanics, Trans. by S. Lefschetz, Annals of Maths. studies, N°11, Princeton, 1943).
- (48) KAC A.M., Vynuzdennye kolebanija nelinejnykh sistem s odnoj stepen'ju svobody, blizkikh k konservativnym (Forced oscillations of a Nonlinear system with one Degree of Freedom near to Conservative), Prikl. Mat. i Mekh., T. XIX, v. 1, 1955, pp. 13-32.
- (49) KAC A.M., Vynuzdennye nelinejnyye kolebanija kandidatskaja dissertacija. Leningradskij politekhniceskij institut im. M. I. Kalinina, 1938. (voir aussi Trudy Leningr. Industr. Instituta N°3, 1939)
- (50) KAC A.M., Bigarmoniceskie kolebanija dissipativnoj nelinejnoj sistemy, vyzyvaemye ili podderzivaemye garmoniceskoj vozmuscajuscej siloj. Prikl. Matem. i Mekh., 1954, 18, N°4, pp. 425-444.
- (51) KAUDERER H., Uber nichtlineare Schwingungen mit unstetiger Erregung, Ingr. Arch., 1959, 28, pp. 154-167.
- (51)a KU Y.K., Analysis and Control of Nonlinear systems, Nonlinear vibrations and Oscillations in Physical Systems. The Ronald Press Company, New-York, 1958.
- (52) KULIKOV N.K., Ob odnom metode issledovaniya ustanovivshisja vynuzdennykh kolebanij nelinejnykh sistem s odnoj stepen'ju svobody, Izv. AN SSSR, otd. Tekhn. Mekh. i Mas., 1959, N°1, pp. 22-33.
- (53) MC LACHLAN N.W., Theory of vibrations, Dover Publications, INC.
- (54) LEVENSON M.E., Harmonic and Subharmonic Response for the Duffing Equation, Thesis, New-York University, 1948 (voir aussi : Journal of Applied Physico, vol. 20, 1949, pp. 1045-1051).
- (55) LEVINSON N. Small periodic perturbations of an autonomous system with a stable orbit., Annals of Math. 52, 1950 pp. 727-738.

- (56) LINDSTEDT A., Differentialgleichungen der Störungstheorie. Mem. Acad.Sci.St Pétersbourg, Vol.XXXI, 1883.
- (57) LOUD W.S., O periodiceskikh resenijakh uravnenija Duffinga s ucetom demfirovanija, J. Math. and Phys., 1955, 34, N°3, pp.173-178. (Mekhanika sb.perev.i. obz.in.period.lit., 1956, N°6, pp.153-159).
- (58) LOUD W.S., Boundedness and Convergence of Solutions of $x''+cx'+g(x)=e(t)$, Duke mathematical Journal, Vol.24 (1957), pp.63-72
- (59) LOUD W.S., Behavior of certain Forced Nonlinear systems of second Order under largen Forcing, Duke Math.Journal, vol.24, 1957, pp.235-248.
- (60) LOUD W.S., Periodic Solutions of $x''+cx'+g(x)=\varepsilon f(t)$., Mémoires of the Am. Mathem.society, N°31, 1959.
- (61) LJAPUNOV A.M., Obščaja zadaca ob ustojcivosti dvizenija, Gostekhteorizdat, 1950 (Problème Général de la stabilité du Mouvement, Ann. of. Math. studies, N°17, 1947.
- (62) LUDEKE C.A., Rezonance. Journ. App. Physics, Vol.13, 1942.
- (63) LUDEKE C.A., Pong W., The existence of predominantly suharmonic oscillations in nonlinear systems. J.App. Phys. .N.Y. 1953, 24, N°1, pp.96-97.
- (64) MAHALINGAM S., A note on one term aproximate solutions for nonlinear vibration problem., J.Roy. Aeronaut. Soc., 1958, 62, N°570, pp.450-451
- (65) MALKIN I.G., Vibrations of a systems with one degree of freedom near a Liapunov system (In Russian), Prikl. Mat. u Mexh. 12, 1948.
- (66) MALKIN I.G., Metody Ljapunova i Poincaré v teorü nelinejnykh Kolebanijakh (Méthodes de Liapunov et Poincaré dans la théorie des oscillations non linéaires) Gostekhteorizdat, 1949.
- (67) MALKIN I.G., Nekotorye zadaci teorü nelinejnykh kolebanij (Quelques problèmes de la théorie des oscillations non linéaires). Moskva, Gosudarstvennoe Izdatel'stvo tekhnico-teoreticeskoj Literatury, 1956.
- (68) MALKIN I.G., Teorija ustojcivosti dvizenija (Théorie de la stabilité du Mouvement), Gostekhteorizdat, M. 1952.

- (69) MALKIN I.G., K teorü periodiceskikh reseny-Poincaré, Prikl. Mat.i Mekh. t.XIII, v.6, 1949.
- (70) MALKIN I.G., O rezonanse v kvazigarmoniceskikh sistemakh Prikl. Matem.i Mekh. t.XVIII, v.4, 1954.
- (71) MALKIN I.G., O pocti periodiceskikh kolebanijakh nelinejnykh neavtonomnykh sistem. Prikl.Mat.i Mekh. 1954, 18, N°6, pp.681-704.
- (72) MANDEL'STAM L.I. i Papalexi N.D., O Javlenijakh pezonansa nogoroda. Zurn.tekh.fiziki, t.II, v.7-8, 1932.
- (73) MARTIENSSEN O. Uber neue Resonanzerscheinungen in Wechselstromkreisen Phys. Zeit. vol.11, 1910.
- (74) MITROPOL'SKIJ Ju.A. Nestacionarnye processy v nelinejnykh kolebatel'nykh sistemakh, Izd. ANUSSR, 1955.
- (74)a MASSERA J.L. The existence of periodic solutions of systems of diff. equations, Duke Math.J., 17, 1950.
- (75) POINCARÉ H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris, Gauthier-Villars, vol.I (1892); vol.II (1893); vol.III (1899).
- (76) POINCARÉ H., Sur les courbes définies par les équations différentielles, Oeuvres, vol.1
- (77) PONTRAGIN L.S., O dinamiceskikh sistemakh, blizkikh k Gamil'tonovym, Z ETF, t.IV pp.883-885, 1934.
- (78) PUCENKIN G.N., Ob odnoj zadace terii nelinejnykh kolebanij, Prikl. Matem; i Mekh., t.XXV pp.693-694-1961.
- (79) RAUSCHER M., Steady Oscillations of Systems with Nonlinear and Unsymmetrical Elasticity Journ.App.Mech., Vol.5, 1938.
- (80) RJABOV Ju.A., Obobščenie odnoj teoremy A.M. Ljapunova, Uc. zap.MGU, v.165, matematika, 1954.
- (81) RJABOV Ju.A., O periodiceskikh resenijakh differencial'nykh uravnenij, sodержasikh malyj parametr., Vestn. Mosk.Un-ta, Ser.Matem., Mekh., astron. fiz.khimü, 1956, N°2, pp.3-12.
- (82) ROBERSON R.E., On an iterative method for nonlinear vibrations. J. Appl. Mech., 1953, 20, N°2, pp.237-240.
- (83) ROSEMBERG E.M., On the periodic solutions of the forced oscillator equation; Quart. Appl. Math., 15, 341, 1958.

- (84) SHIMIZU T., Nonlinear oscillation with hysteresis phenomena., Proc. 5 th. Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1955, Tokyo, 1956, pp.435-438.
- (85) SHIMIZU T., Resonant oscillations for some non-linear differential equations, Proc. 4 th. Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, Tokyo, 1955, pp.443-446.
- (86) STELMACHER K.L. Über erzwungene nicht-lineare Schwingungen hoher Erregerfrequenz und ihre Stabilität, Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, N°3, pp.105-119.
- (87) SOKOLOV V.M., O periodiceskikh kolebanijakh sistem Ljapunova v odnom osobom slucae., Trudy Ural. Politekh. in-ta, 1954.
- (88) STOKER J.J., Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems., Intersci. Publi. INC, New York, LTD London, 1950.
- (89) STOKER J.J. Nonlinear vibrations of systems with several degrees of freedom, Proceed. 2 nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann. Arbor. Mich., 1954, N.Y. 1955, PP. 33-43
- (90) STOKER J.J., Mathematical methods in nonlinear vibration theory, Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis; N.Y., 1953, 2, pp.28-55
- (91) ŠIMANOV S.N., K teorü kvazigarmoniceskikh kolebanü Prikl. Mat. i Mekh., 16, N°2, 1952.
- (92) ŠIMANOV S.N., K teorü kolebanij kvazilinejnykh sistem, Prikl. Mat. i Mekh., 18, N°2, 1954, pp.155-162.
- (93) ŠIMANOV S.N., Ob odnom sposobe polucenija uslovij suscestvovanija periodiceskikh rešenij nelinejnykh sistem, Prikl. Mat. i Mekh., 1955, 19, N°2, pp.225-228.
- (94) ŠIMANOV S.N., Ob otykanü kharakteristiceskikh pokazatelej sistem linejnykh differencial'nykh uravneny s periodiceskimi koeficientami, Prikl. Mat. i Mekh. 1958, 22, N°3, pp.382-385.
- (95) TURRITIN M.L. and CULMER J.A., Periodic Solutions of a Modified Duffing's Equation Perturbed by Damping, a preliminary report of work done at the University of Minnesota under USAF contract N°AF 33 (038), 22893, 1953.
- (96) TEODORČIK K.F., Avtokolebatel'nye sistemy. Gostekhteorizd M.L. 1952.

- (97) VON KARMAN Th., The Engineer Grapples with Nonlinear Problems., Bull. Am. Math. Soc., Vol.46, 1940.
- (98) YOUNG D., Forced vibration of system with nonlinear restoring force, Proceed. First Midwestern Conf. Solid Mech. Engng. Exp. St., Univ. of Ill, 1953, pp.164-169.
- (99) YOUNG D. and HESS P.N. On the stability of harmonic solutions of a modified form of Duffing's equation, Proc. 2 nd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann. Ar. Mich., 1954, N-Y, 1955 pp.79-84.
- (100) ANDRONOV A.A., Vitt A.A. i Khajkin S.E., Teoria Kolebaniy. Fizmatgiz, M.1959
- (101) BOHR G., Počti periodičeskie funkcii, OGIZ, 1934.
- (102) CODDINGTON, E.A. and LEVINSON N., Theory of Ordinary Differential Equation, New York, 1955.
- (103) BEN HARTOG, Mechanical Vibrations, Mc Graw-Hill Comp., New-York and London, 1947.
- (104) FRIEDRICH K.O., Advanced Ordinary, Differential Equations, New-York, 1954.
- (105) GOURSAT E. Cours d'analyse mathématique, vol.II, III, Paris, Gauthier Villars.
- (106) INCE E.L., Ordinary Differential Equations, Longmans, Green and Co, London, 1927.
- (107) LEBESGUE S., Lectures on Differential Equations, Princeton Univ. Press, 1946.
- (108) LEVITAN B.M., Počti periodičeskie funkcii, Gostekhnizdat 1953.
- (109) ČETABV N.G., Ustoicivost' dvizeniya, izd, 2è, Gostekhnizdat 1952.
- (110) MINORSKY N. Introduction to Non-linear Mechanics, Ann. Arbor Mich. 1947
 - a) Dynamics and Nonlinear Mechanics... 2) The theory of oscillations. vol.II of Surveys in Applied Mathematics, John Willey sous I.N.C., Publishers, 1953.

- TABLE DES MATIERES -

LE PROBLEME DE DUFFINGCHAPITRE I - INTRODUCTION

1. Le but de la thèse. Considérations générales
2. La méthode de Duffing. Vibration harmonique sans amortissement
3. les courbes de résonance ou les courbes d'amplitudes
4. L'influence de l'amortissement sur les vibrations forcées
5. Méthode du petit paramètre (ou de la perturbation). L'idée de la méthode de Poincaré
6. Justification mathématique de la méthode du petit paramètre (34,67)
L'existence des séries selon les puissances du petit paramètre.
7. L'équation de Duffing étudiée à l'aide de la méthode du petit paramètre.
 - A. Méthode de LINDSTEDT (56)
 - B. Méthode de MALKIN (57)
 - C. Méthode de KRYLOV-BOGOLJUBOV et VAN DER POL (11,47)
8. Vibrations sous-harmoniques
9. Problème de stabilité des mouvements périodiques étudiés.

- - - 1

CHAPITRE II - Solutions périodiques de l'équation de DUFFING, considérée comme un système approché de systèmes de LIAPOUNOFF.

1. Enoncé du problème, solutions génératrices
2. Solutions génératrices périodiques ayant la période donnée
3. Solutions périodiques de la forme $\{x^{(m)}\}$, du système (1.1)
4. Solutions périodiques de la forme $\{x^{(0)}\}$
5. Solutions périodiques à la résonance $\{x^{(rés)}\}$
6. Stabilité des solutions périodiques
7. Solutions périodiques de la forme $\{x^{(m)}\}$ en présence d'une force de résistance.
8. Solution périodique $\{x^{(0)}\}$
9. Solution périodique à la résonance $\{x^{(rés)}\}$
10. Stabilité des solutions périodiques étudiées dans les §§ 7, 8, et 9.

- - - 427

11. Problème de Duffing en présence d'une force excitatrice à deux harmoniques
12. Stabilité des solutions périodiques trouvées dans le § 11, Remarques.
13. Le caractère du développement des vibrations
14. Vibrations sous-harmoniques du problème de Duffing

CHAPITRE III - Vibrations presque-périodiques de l'équation quasi-linéaire de Duffing

1. Notions fondamentales
2. Quelques particularités du problème des vibrations presque-périodiques. De petits diviseurs.
3. Solutions presque-périodiques de l'équation de Duffing
4. Solutions presque-périodiques de l'équation de Duffing à la résonance.

---127

ANNEXE

A. Systèmes approchés de systèmes arbitraires non-linéaires.

1. Solutions périodiques des systèmes non autonomes dans le cas où la solution génératrice est isolée.
2. Solutions périodiques des systèmes non-autonomes dans le cas d'une famille de solutions génératrices.
3. Cas des équations analytiques.
4. Calcul pratique des solutions périodiques.
5. Systèmes non-autonomes à un degré de liberté approchés d'un système conservatif.
6. Conditions de la stabilité de la solution périodique étudiée dans le précédent paragraphe.

---168

B. Systèmes de Liapounoff

1. Généralités
2. Solutions périodiques des systèmes de Liapounoff
3. Méthode pratique de calcul des solutions périodiques des systèmes de Liapounoff.
4. Quelques propriétés des solutions périodiques des systèmes de Liapounoff.

---197-

C. Systèmes approchés de systèmes de Liapounoff -- 241

1. Les solutions génératrices
2. La solution périodique $\{x_S^{(0)}\}$
3. Solutions périodiques à la résonance
4. Méthode pratique de calcul à la résonance
5. Solutions périodiques de la forme $\{x_S^{(m)}\}$
6. Conditions de stabilité.

BIBLIOGRAPHIE -

---234

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"Etude du rapport de CHKLOVER sur la transmission de
chaleur périodique".

Vu et approuvé :

PARIS, le 30 Mai 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie
de PARIS

Jean ROCHE

